Devoir Maison N°12

Polynômes

1 Nombres de Bernoulli

On note E le $\mathbb{R}$-e.v. des polynômes à coefficients réels, et pour $n \in \mathbb{N}$, E_n le $\mathbb{R}$-e.v. des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On notera indifféremment P pour désigner le polynôme ou la fonction polynômiale associée.

$\boxed{Q\ 1}$ On considère un polynôme $A \in E$ de degré $p \geq 0$, et de coefficient dominant a_p. Montrer qu'il existe un unique polynôme $B \in E$ vérifiant :

1. $B' = A$;
2. $\int_0^1 B(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

On précisera le degré et le coefficient dominant de B en fonction de p et de a_p.

On peut donc définir par récurrence la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

1. $B_0 = 1$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $B_n' = nB_{n-1}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\int_0^1 B_n(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

$\boxed{Q\ 2}$ Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant du polynôme B_n.

Les polynômes B_n s'appellent les *polynômes de Bernoulli*. On définit ensuite les *nombres de Bernoulli* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = B_n(0)$$

$\boxed{Q\ 3}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k \tag{1}$$

$\boxed{Q\ 4}$ Expliciter les polynômes B_1, B_2 et B_3, ainsi que les nombres b_1, b_2 et b_3.

$\boxed{Q\ 5}$ Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X) \tag{2}$$

On pourra calculer la dérivée du polynôme $Q = (-1)^{n+1} B_{n+1}(1 - X)$ et calculer $\int_0^1 Q(t)\ \mathrm{d}t$.

$\boxed{Q\ 6}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(X) = 2^{n-1}\Big[B_n(X/2) + B_n\big((X + 1)/2\big)\Big] \tag{3}$$

$\boxed{Q\ 7}$ Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^\star$, $b_{2p+1} = 0$ et que $\forall p \geq 2$, $B_p(1) = B_p(0) = b_p$.

Q 8 Montrer successivement que $\forall p \geq 2$,

$$b_{2p+2} = \sum_{i=0}^{2p+2} \binom{2p+2}{i} b_i$$

$$b_{2p} = -\frac{1}{(p+1)(2p+1)} \sum_{i=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{i} b_i \tag{4}$$

Q 9 Calculer b_4 en utilisant la formule 4.

Q 10 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$$

2 Calcul de $\zeta(2)$

Q 11 Soit un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \notin \pi\mathbb{Z}$, et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\dfrac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1} a}$ sous la forme d'un polynôme en cotan a.

Q 12 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver à l'aide de la question précédente les racines réelles du polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k}$$

Q 13 Calculer la somme des racines du polynôme $P(X)$.

Q 14 Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On rappelle que $\sin\theta < \theta < \tan\theta$. En déduire que $\operatorname{cotan}^2\theta < \dfrac{1}{\theta^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2\theta$.

On définit la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Q 15 En utilisant l'inégalité précédente avec les racines de P, montrer que la suite (S_n) converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Corrigé.

Q 1

1. Unicité : considérons deux polynômes B_1 et B_2 vérifiant ces deux relations. Puisque $B_1' = B_2'$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $B_1(x) = B_2(x) + C$. En intégrant entre 0 et 1, on trouve que $C = 0$ et donc que $B_1 = B_2$.
2. Existence : si A est le polynôme nul, il suffit de poser $B = 0$. Si le polynôme A n'est pas nul, il s'écrit $A = a_pX^p + \cdots + a_0 = \sum_{k=0}^{p} a_kX^k$. Posons alors $B = \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{k+1}X^{k+1} + C$ où C est une constante. Le polynôme B vérifie $B' = A$. Pour qu'en plus, on aît $\int_0^1 B(t)\,\mathrm{d}t = 0$, il suffit de choisir $C = -\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$. On trouve donc que le polynôme B est de degré $p+1$, et que son coefficient dominant vaut $\dfrac{a_p}{p+1}$.

Q 2 On démontre par récurrence sur n que le degré du polynôme B_n vaut n et qu'il est unitaire, en utilisant la question 1.

Q 3 Par récurrence sur n.

$$\mathcal{P}(n) : B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}X^k$$

$\mathcal{P}(0)$: $B_0 = \binom{0}{0} b_0 = b_0 = B_0(0) = 1$.

$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: d'après $\mathcal{P}(n)$,

$$B'_{n+1} = (n+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}X^k$$

En primitivant,

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= (n+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{b_{n-k}}{k+1}X^{k+1} + C \\ &= \sum_{p=1}^{n+1} \frac{n+1}{p}\binom{n}{p-1} b_{n+1-p}X^p + C \\ &= \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n+1}{p} X^p + C \end{aligned}$$

où l'on a fait le changement d'indice $p = k+1$ et utilisé la relation $\binom{n+1}{p} = \frac{n+1}{p}\binom{n}{p-1}$ pour $1 \le p \le n+1$. Comme $B_n(0) = C = b_{n+1}$, on peut intégrer la constante à la somme et l'on obtient l'expression de B_{n+1} :

$$B_{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} b_{n+1-p}X^p$$

Q 4

- Puisque $B_1' = 1$, $B_1 = X + b_1$ et comme $\int_0^1 B_1(t)\,\mathrm{d}t = 0$, on trouve que $\boxed{b_1 = -1/2}$, puis que $\boxed{B_1 = X - 1/2}$.
- Puisque $B_2' = 2B_1$, $B_2 = X^2 - X + b_2$ et puisque $\int_0^1 B_2(t)\,\mathrm{d}t = 0$, on trouve que $\boxed{b_2 = 1/6}$ et $\boxed{B_2 = X^2 - X + 1/6}$.
- Puisque $B_3' = 3B_2$, $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + b_3$ et la condition $\int_0^1 B_3(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donne $\boxed{b_3 = 0}$ et $\boxed{B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X}$.

Q 5 Montrons ce résultat par récurrence sur n.

$$\mathcal{P}(n) : B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$$

$\mathcal{P}(0)$ est vérifiée clairement.
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: Posons $Q = (-1)^{n+1}B_{n+1}(1-X)$. Alors

$$Q'(X) = -(-1)^{n+1}B'_{n+1}(1-X) = (n+1)(-1)^n B_n(1-X) = (n+1)B_n(X) = B_{n+1}(X)$$

Par conséquent, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $Q = B_n + C$. Mais par le changement de variables $u = 1-t$,

$$\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(1-t)\,\mathrm{d}t = -(-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

d'où $C = 0$, et donc $Q = B_{n+1}$.

$\boxed{Q\ 6}$ Par récurrence :

$$\mathcal{P}(n) : B_n = 2^{n-1}\Big[B_n(X/2) + B_n\big((X+1)/2\big)\Big]$$

$\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: posons $Q = 2^n\Big[B_{n+1}(X/2) + B_{n+1}\big((X+1)/2\big)\Big]$. Calculons

$$\begin{aligned} Q' &= 2^n\Big[\frac{1}{2}B'_{n+1}(X/2) + \frac{1}{2}B_n\big((X+1)/2\big)\Big] \\ &= (n+1)2^{n-1}\Big[B_n(X/2) + B_n\big((X+1)/2\big)\Big] \\ &= (n+1)B_n(X) \\ &= B'_{n+1} \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $Q = B_{n+1} + C$. Mais en effectuant les changement de variables $u = t/2$ et $v = (t+1)/2$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t &= 2^n\Big[\int_0^1 B_{n+1}(t/2)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 B_{n+1}\big((t+1)/2\big)\,\mathrm{d}t\Big] \\ &= 2^{n-1}\Big[\int_0^{1/2} B_{n+1}(u)\,\mathrm{d}u + \int_{1/2}^1 B_{n+1}(v)\,\mathrm{d}v\Big] \\ &= 2^{n-1}\int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, $C = 0$ et donc $Q = B_{n+1}$.

$\boxed{Q\ 7}$ Soit $p \geq 1$. D'après la relation 3, avec $n = 2p+1$ et en faisant $x = 0$, on trouve que

$$B_{2p+1}(0) = 2^{2p}\left[B_{2p+1}(0) + B_{2p+1}(1/2)\right]$$

D'après la relation 2, en faisant $x = 1/2$, on trouve que

$$B_{2p+1}(1/2) = -B_{2p+1}(1/2)$$

donc $B_{2p+1}(1/2) = 0$ et donc $B_{2p+1}(0) = b_{2p+1} = 0$. En utilisant la relation 2, avec $p = 2k$, on obtient immédiatement que $b_{2k} = B_{2k}(0) = B_{2k}(1)$, et lorsque $p = 2k+1$, on trouve d'après la relation 2 que $B_{2k+1}(1) = -B_{2k+1}(0) = b_{2k+1} = 0$. Dans tous les cas, $B_p(1) = B_p(0)$.

$\boxed{Q\ 8}$ D'après la question précédente, $B_{2p+2}(1) = (-1)^{2p+2}B_{2p+2}(0) = b_{2p+2}$.
En utilisant ensuite la relation 1 avec $x = 1$, et la symétrie des coefficients binômiaux :

$$\begin{aligned} B_{2p+2}(1) &= \sum_{k=0}^{2p+2}\binom{2p+2}{k}b_{2p+2-k} \\ &= \sum_{i=0}^{2p+2}\binom{2p+2}{i}b_i \quad (i = 2p+2-k) \end{aligned}$$

En sortant de la somme les termes correspondant aux indices $i = 2p-1,\ 2p,\ 2p+1,\ 2p+2$, on trouve que

$$\begin{aligned} b_{2p+2} &= \sum_{i=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{i} b_i + \binom{2p+2}{2p-1} b_{2p-1} + \binom{2p+2}{2p} b_{2p} + \binom{2p+2}{2p+1} b_{2p+1} + \binom{2p+2}{2p+2} b_{2p+2} \\ &= \sum_{i=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{i} b_i + \binom{2p+2}{2p} b_{2p} + b_{2p+2} \end{aligned}$$

En effet, les nombres b_{2p-1} et b_{2p+1} sont nuls d'après la question précédente. Les nombres b_{2p+2} s'éliminent et puisque $\binom{2p+2}{2p} = \binom{2p+2}{2} = (p+1)(2p+1)$, on en tire le résultat de l'énoncé.

$\boxed{Q\ 9}$ De la formule précédente, on tire $b_4 = -\dfrac{1}{30}$.

$\boxed{Q\ 10}$ Par récurrence sur n :

$$\mathcal{P}(n) : B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$$

$\mathcal{P}(1)$: Puisque $B_1(X) = X - 1/2$, $B_1(X+1) - B_1(X) = 1$.
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: D'après $\mathcal{P}(n)$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Intégrons la relation précédente entre 0 et x :

$$\begin{aligned} \int_0^x B_n(t+1)\,\mathrm{d}t - \int_0^x B_n(t)\,\mathrm{d}t &= n\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ \int_1^{x+1} B_n(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x B_n(u)\,\mathrm{d}u &= x^n \quad (u = t+1) \\ \int_x^{x+1} B_n(t)\,\mathrm{d}t &= x^n \qquad \text{(Chasles)} \\ \left[\frac{1}{n+1} B_{n+1}(t)\right]_x^{x+1} &= x^n \quad (B'_{n+1} = (n+1)B_n) \\ B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) &= (n+1)x^n \end{aligned}$$

et puisque cette relation est vraie pour tout réel x, on en déduit l'égalité entre polynômes.

$\boxed{Q\ 11}$ Écrivons :

$$\begin{aligned} \sin\big[(2n+1)a\big] &= \frac{e^{i(2n+1)a} - e^{-i(2n+1)a}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i}\Big[(\cos a + i\sin a)^{2n+1} - (\cos a - i\sin a)^{2n+1}\Big] \\ &= \frac{1}{2i}\Big[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \big(1-(-1)^k\big) \sin^k a \cos^{2n+1-k} a\Big] \\ &= \frac{1}{i} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \sin^k a \cos^{2n+1-k} a \\ &= \frac{1}{i} \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} \sin^{2p+1} a \cos^{2(n-p)} a \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p \sin^{2p+1} a \cos^{2(n-p)} a \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1}a} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\frac{\cos^{2(n-k)}a}{\sin^{2(n-k)}a}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\operatorname{cotan}^{2(n-k)}a\end{aligned}$$

Il suffit donc de poser

$$\boxed{Q(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^kX^{2(n-k)}}$$

et on a bien $\dfrac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1}a}=Q\big(\operatorname{cotan}(a)\big)$.

$\boxed{Q\ 12}$ Si $a\notin\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1}a}=0\iff(2n+1)a=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\iff a=\frac{k\pi}{2n+1},\ (k\in\mathbb{Z})$$

Si l'on pose

$$\boxed{\alpha_k=\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1},\ k\in[\![1,n]\!]}$$

D'après la question 11, $P(\alpha_k)=0$. On a donc trouvé n racines distinctes du polynôme P qui est de degré n. Par conséquent, les racines de P sont les réels α_k, pour $k\in[\![1,n]\!]$. Ce polynôme est scindé à racines simples.

$\boxed{Q\ 13}$ En utilisant les relations coefficients-racines d'un polynôme,

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

où $a_n=\dbinom{2n+1}{1}=2n+1$ et $a_{n-1}=-\dbinom{2n+1}{3}$. Par conséquent,

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n}=\boxed{\frac{n(2n-1)}{3}}$$

$\boxed{Q\ 14}$ Il suffit de remarquer que $1+\operatorname{cotan}^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}>\dfrac{1}{\theta^2}$.

$\boxed{Q\ 15}$ Avec $\theta_k=\dfrac{k\pi}{2n+1}$, $(k\in[\![1,n]\!])$, On trouve que

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k<\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2}<n+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$$

d'où l'on tire

$$\pi^2\frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{\pi^2n}{(n+1)^2}+\pi^2\frac{n(2n-1)}{3(2n-1)^2}$$

Comme les deux suites encadrantes convergent vers $\dfrac{\pi^2}{6}$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (S_n) converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.