Préparation Concours Blanc N°2 Polynômes

Problème 1

Préliminaires .

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si P admet une infinité de racines alors P est le polynôme nul.
2. En déduire que pour tout couple $(P, Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$, $P = Q \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{C}^*$, $\tilde{P}(u) = \tilde{Q}(u)$.
3. Résoudre la suite récurrente : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_n$ avec $u_0 = 2$ et $u_1 = 0$.

Le problème .

On s'intéresse à l'existence et aux propriétés de la famille de polynômes $P_n \in \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \tilde{P_n}(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose qu'un tel polynôme P_n existe .
   (a) Montrer que P_n n'est pas le polynôme nul.
   On notera alors d_n le degré du polynôme P_n et on notera $P_n = \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} X^k$.
   (b) Montrer, en vous aidant du binôme de Newton, que $Q_n(X) = X^{d_n} P_n(X + \frac{1}{X})$ est un polynôme de degré $2d_n$.
   (c) En vous aidant des préliminaires, en déduire que :
   $$X^{d_n} P_n(X + \frac{1}{X}) = X^{d_n+n} + X^{d_n-n}$$
   (d) Justifier que $d_n = n$.
   (e) Montrer que si P_n existe alors il est unique.
2. Déterminer P_0 et P_1 .
3. Montrer que $P_2 = X^2 - 2$.
4. En vous aidant des préliminaires, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$
   On pourra évaluer en $z + \frac{1}{z}$ pour $z \in \mathbb{C}^*$.
5. Calculer P_3.
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, conjecturer et démontrer le coefficient dominant de P_n.
7. Pour $n \in \mathbb{N}$, conjecturer et démontrer la parité de $\tilde{P_n}$.
8. Déterminer à l'aide d'une suite récurrente, le coefficient constant de P_n.
9. On cherche à déterminer les racines de P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$, montrer que :
   $$z^n + \frac{1}{z^n} = 0 \Rightarrow |z| = 1$$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}^*$, l'équation :
   $$z^n + \frac{1}{z^n} = 0$$
   On pourra chercher z sous forme trigonométrique.
   (c) En déduire que les racines de P_n sont de la forme $2\cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   (d) Déterminer la factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Problème 2

Soient a et b deux nombres complexes.

Dans ce problème, on étudie les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation $(E_{a,b}) : P\left(X^2\right) = P(X+a) \times P(X+b)$

- ▷ Dans les deux premières parties, on s'intéresse à des cas particuliers.
- ▷ Dans la troisième partie, on étudie certaines propriétés vérifiées par les polynômes non constant qui satisfont $(E_{a,b})$.

Les trois parties de ce problème sont indépendantes les unes des autres.

Première partie : polynômes constants vérifiant $(E_{a,b})$

Déterminer l'ensemble des polynômes constants de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $(E_{a,b})$.

Dans toute la suite, on note $S_{a,b}$ l'ensemble des polynômes **non constants** vérifiant (E_{ab}).

Deuxième partie : étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question, on se place dans le cas particulier où $a = b$.
   On note P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$, et on note r le nombre de ses racines **distinctes**.
   (a) Montrer que le polynôme $(P(X+a))^2$ possède exactement r racines distinctes.
   (b) Montrer que $P\left(X^2\right)$ possède $2r$ racines distinctes si 0 n'est pas racine de P, et qu'il en possède $2r-1$ sinon.
   (c) En déduire que, si $P \in S_{a,a}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $P = \lambda X^n$.
   (d) Conclure que, si $a \neq 0$, $S_{a,a} = \emptyset$.
   Préciser l'ensemble $S_{0,0}$.
2. Dans cette question, on se place dans le cas particulier où $a = 0$ et $b = 1$.
   On note P un polynôme de $S_{0,1}$.
   (a) Justifier que P possède au moins une racine $\alpha \in \mathbb{C}$.
   (b) Montrer que $P(\alpha^2) = 0$, puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P\left(\alpha^{2^n}\right) = 0$.
   (c) Déduire de ce qui précède qu'il existe $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\alpha^{2^k} = \alpha^{2^\ell}$, puis que $|\alpha| \in \{0, 1\}$.
   (d) Prouver que $P\left((\alpha-1)^2\right) = 0$, puis que $|\alpha - 1| \in \{0, 1\}$.
   (e) Conclure que les seules racines possibles de P sont 0, 1, $-j$ et $-j^2$.
   (f) En utilisant la question 2.(b), montrer que ni $-j$, ni $-j^2$ ne sont racines de P.
   (g) Montrer que $S_{0,1} = \left\{\left(X^2 - X\right)^n ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Troisième partie : quelques propriétés dans le cas général

Dans cette partie, on établit certains résultats généraux dans le cas où $S_{a,b}$ n'est pas vide.
On suppose donc que a et b sont tels que $S_{a,b} \neq \emptyset$.

1. Montrer que tout polynôme de $S_{a,b}$ est unitaire, c'est-à-dire que son coefficient dominant vaut 1.
2. Montrer que l'ensemble $S_{a,b}$ est stable par produit, autrement dit que : $\forall (P, Q) \in S_{a,b}^2$, $PQ \in S_{a,b}$.
3. Montrer que, pour tout $P \in S_{a,b}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P^n \in S_{a,b}$.
4. On cherche ici à établir la réciproque du résultat précédent.
   (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$.
   On veut montrer ici que $A^n - B^n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(A - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} B\right)$.
      i. Montrer que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$.
      ii. On pose $U = A^n - B^n$ et $V = \prod_{k=0}^{n-1}\left(A - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} B\right)$.
      Montrer que, si z est un nombre complexe qui n'est pas racine de B, alors $U(z) = V(z)$.
      iii. Conclure.
   (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme non constant unitaire de $\mathbb{C}[X]$.
   Montrer que, si $P^n \in S_{a,b}$, alors $P \in S_{a,b}$.

FIN