Préparation Concours Blanc N°2
Matrices

Jeudi 14 Mars 2019

Durée : 2 heures

Problème 1

Soit p un réel fixé de l'intervalle $]0;1[$: $0<p<1$.
On définit la matrice :

$$A=\begin{pmatrix} p & 0 & 0\\ 1-p & p & 0\\ 0 & 1-p & 1\end{pmatrix}$$

Partie 1

1. Calculer A^2 . Que vaut A^0 ?
2. Montrer que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, il existe trois réels a_n, b_n et c_n tels que :
$$A^n=\begin{pmatrix} p^n & 0 & 0\\ a_n & p^n & 0\\ b_n & c_n & 1\end{pmatrix}$$
Pour cela, on utilisera la relation $A^{n+1}=A^nA$ et on exhibera les expressions a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n (obtenues en cours de la preuve).
3. La suite $(c_n)_n$ ainsi construite est une suite "classique" : de quel type est-elle ?
En déduire l'expression de c_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.
4. Étude de la suite $(a_n)_n$.
   (a) Montrer que la suite $(a_n)_n$ vérifie la relation :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}-2pa_{n+1}+p^2a_n=0$$
   (b) Exprimer a_n en fonction de n.
5. On pose la matrice colonne $U=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MU=U$.
$$\mathcal{C}=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})|MU=U\}$$
   (a) Soit la proposition $\mathcal{P}$: "$M\in\mathcal{C},N\in\mathcal{C}\Rightarrow M+N\in\mathcal{C}$", cette proposition est-elle vraie ?
   (b) Montrer :
   $$M\in\mathcal{C},N\in\mathcal{C}\Rightarrow MN\in\mathcal{C}$$
   (c) On pose $T={}^tA$, la transposée de la matrice A.
   Montrer que $T\in\mathcal{C}$ puis que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $T^n\in\mathcal{C}$.
   (d) Quelle égalité a-t-on entre T^n et A^n ?
   (e) En déduire, connaissant une expression de a_n, que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
   $$b_n=1-np^{n-1}+(n-1)p^n$$

Partie 2

On définit les matrices :

$$B=\begin{pmatrix} p & 0 & 0\\ 0 & p & 0\\ 1-p & 1-p & 1\end{pmatrix} \textbf{ et } C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1-p & 0 & 0\\ p-1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On souhaite calculer A^n d'une autre façon. On définit $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer $\Delta=P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.
3. En déduire une expression de B^n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.
4. Calculer C^2.
5. En déduire, pour $n\in\mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction des puissances des matrices de B et C.
6. Retrouver A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

Problème 2

Partie 1

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On rappelle que $\det(M) = ad - bc$ est le déterminant de M.

1. Montrer que M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$.
2. Soit $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.
3. En déduire que, si M est une matrice inversible, $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$.

Partie 2

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ carrées d'ordre 2 à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Dans toute la suite du problème, les lettres a, b, c, d désignent des éléments de $\mathbb{Z}$ et on note : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ est un anneau.
2. On note $GL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
   (a) Rappeler la définition d'un élement inversible dans un anneau. Donner les inversibles de $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}^\times$.
   (b) Démontrer que l'ensemble $GL_2(\mathbb{Z})$ des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication, appelé le groupe des unités de l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
   (c) En utilisant la partie 1, montrer que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) \in \mathbb{Z}^\times$.
   (d) En déduire que
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \text{ si et seulement si } |ad - bc| = 1.$$
3. On pose
   $$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \Big/ ad - bc = 1 \right\}.$$
   (a) Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{Z}), \times)$.
   (b) Trouver un couple d'**entiers** $(c_0, d_0) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $3c_0 - 5d_0 = 1$.
   (c) En déduire que l'ensemble des couples d'**entiers** $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $SL_2(\mathbb{Z})$ sont exactement les couples d'entiers (c, d) tels que $c = c_0 + 5k$ et $d = d_0 + 3k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
   (d) Déterminer l'ensemble des couples $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $GL_2(\mathbb{Z})$.
   (e) Quelle est la condition nécessaire et suffisante portant sur le couple (a, b) de $\mathbb{Z}^2$ pour qu'il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $GL_2(\mathbb{Z})$?