Corrigé

Problème 1

1. $A^2 = \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 \\ 2p(1-p) & p^2 & 0 \\ (1-p)^2 & 1-p^2 & 1 \end{pmatrix}$. $A^0 = I_3$.
2. On procède par récurrence :
   Initialisation : Pour $n = 0$, le rśultat est trivial avec $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ car $A^0 = I_3$.
   Hérédité : Soit n tel que la propriété est vraie. Montrons le pour $n+1$.
   $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{n+1} & 0 & 0 \\ pa_n + p^n(1-p) & p^{n+1} & 0 \\ pb_n + (1-p)c_n & pc_n + 1 - p & 1 \end{pmatrix}$. Le résultat est donc vrai en posant $a_{n+1} = pa_n + p^n(1-p)$, $b_{n+1} = pb_n + (1-p)c_n$ et $c_{n+1} = pc_n + 1 - p$.
3. $(c_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique donc, pour tout n, $c_n = p^n(0-1) + 1 = 1 - p^n$.
4. (a) Pour tout n, $a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2 a_n = pa_{n+1} + p^{n+1}(1-p) - 2pa_{n+1} + p^2 a_n = -pa_{n+1} + p^{n+1}(1-p) + p^2 a_n$ $= -p^2 a_n - p^{n+1}(1-p) + p^{n+1}(1-p) + p^2 a_n = 0$
   (b) On a donc une suite rćurrente linéaire d'ordre 2, l'équation caractéristique est $x^2 - 2px + p^2 = 0$ qui admet pour unique solution double p. Donc, pour tout n, $a_n = (\lambda n + \mu)p^n$ or $a_0 = 0$ donc $\mu = 0$ et $a_1 = 1 - p$ donc $\lambda = \frac{1-p}{p}$ et finalement, $a_n = np^{n-1}(1-p)$.
5. (a) On a $MU = U$ et $NU = U$ donc $(M+N)U = MU + NU = U + U = 2U$ donc la proposition est fausse.
   (b) $(MN)U = M(NU) = MU = U$ donc $MN \in \mathcal{C}$
   (c) $T = {}^tA = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $TU = \begin{pmatrix} p+1-p \\ p+1-p \\ 1 \end{pmatrix} = U$. D'après la question précédente, $T^2 = T \times T \in \mathcal{C}$ et donc par récurrence, $T^n \in \mathcal{C}$.
   (d) $T^n = {}^t(A^n)$.
   (e) D'après les deux questions précédentes, $T^n = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T^n U = U$ donc $p^n + a_n + b_n = 1$ donc $b_n = 1 - p^n - a_n = 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n$.
6. (a) On effectue $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ et P est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $L_3 \leftarrow L_2 + L_3$ pour obtenir $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est clairement inversible car les trois coefficients de la diagonale sont non nuls (et c'est une matrice triangulaire supérieure). En effectuant les mêmes transformations, on résoud $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On obtient $z = a + b + c$, $y = -b$ et $x = a + b$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) $BP = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 1-p & 1-p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & p & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ -p & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc
   $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & p & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ -p & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est diagonale.
   (c) $B = PDP^{-1}$, $B^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & (-p)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} p^n & (-p)^n & 0 \\ 0 & -(-p)^n & 0 \\ -p^n & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} p^n & p^n - (-p)^n & 0 \\ 0 & (-p)^n & 0 \\ 1 - p^n & 1 - p^n & 1 \end{pmatrix}$
   (d) $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (e) Remarquons que $BC = CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p(1-p) & 0 & 0 \\ -p(1-p) & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc on peut appliquer le binôme de Newton, $A^n = (C+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^k B^{n-k} = B^n + nCB^{n-1}$
   (f) $A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ np^{n-1}(1-p) & p^n & 0 \\ 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n & 1 - p^n & 1 \end{pmatrix}$.

Problème 2

Partie 1

1. cf cours
2. On a $MN = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$ donc
   $\det(MN) = (aa'+bc')(cb'+dd') - (ab'+bd')(ca'+dc')$
   $= aa'cb' + aa'dd' + bc'cb' + bc'dd' - ab'ca' - ab'dc' - bd'ca' - bd'dc'$
   $= aa'dd' + bc'cb' - ab'dc' - bd'ca'$
   or $\det(M)\times\det(N) = (ad-bc)(a'd'-b'c') = aa'dd' + bb'cc' - adb'c' - a'd'bc$
   d'où le résultat.
3. Si M est inversible alors $MM^{-1} = I_2$ donc $\det(M)\det(M^{-1}) = \det(I_2) = 1$ et $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$.

Partie 2

1. $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ est clairement un sous anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (a) cf cours
   (b) cf cours (l'ensemble des inversible $A^\times$ est un groupe)
   (c) D'après la Partie 1, M est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ssi $\det(M) \neq 0$. Mais si l'inverse est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, on obtient $\det(M)\det(M^{-1}) = 1$ avec $\det(M)$ et $\det(M^{-1})$ dans $\mathbb{Z}$ donc M inversible ssi $\det(M) \in \mathbb{Z}^\times$.
   (d) Comme les inversibles de $\mathbb{Z}$ sont 1 et -1, on a bien M inversible ssi $|\det(M)| = 1$ ssi $|ad-bc| = 1$.
3. (a)
   - $I_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$.
   - Si M et N sont dans $SL_2(\mathbb{Z})$ alors $\det(MN) = \det(M)\det(N) = 1\times 1 = 1$ donc $MN \in SL_2(\mathbb{Z})$.
   - Si $M \in SL_2(\mathbb{Z})$, $det(M) = 1$ donc M est inversible d'après la question précédente. Et $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} = 1$ donc $M^{-1} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

   (b) $c_0 = 2$ et $d_0 = 1$ conviennent.
   (c) La matrice appartient à $SL_2(\mathbb{Z})$ ssi $3c - 5d = 1$ ssi $3c - 5d = 3c_0 - 5d_0$ ssi $5(d-d_0) = 3(c-c_0)$. 5 et 3 sont premiers entre eux donc par le lemme de Gauss, il existe $k \in \mathbb{Z}$, $d = 1+3k$ et $c = 2+5k$.
   (d) cf ci-dessus.
   (e) D'après Bezout, si et seulement si $a \wedge b = 1$.