Devoir Sur Table N°15

Déterminants Systèmes Linéaires

Problème 1
Systèmes à diagonale strictement dominante

On note $A=(a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $B=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.

On identifiera les éléments de $\mathbb{K}^n$ et les matrices colonnes correspondantes.

Pour tout $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ de $\mathbb{K}^n$, on note $\|Y\|=\max\{|y_j|,\ j=1,\ldots,n\}$.

On considère le système (1) : $AX=B$ d'inconnue $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ dans $\mathbb{K}^n$.

On suppose que : $\forall\, i=1,\ldots,n,\ |a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$.

On exprime cette propriété en disant que A est à *diagonale strictement dominante.*

1. Montrer que A est inversible.

   Indication : raisonner par l'absurde et considérer un vecteur X de $\mathbb{K}^n$, non nul, tel que $AX=0$; utiliser la coordonnée de X qui est de module maximum. [S]
2. On note $\widetilde{X}=(\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_n)$ l'unique solution du système (1).

   En divisant la i-ième équation de (1) par a_{ii} et en la résolvant par rapport à x_i, on transforme (1) en un système équivalent (2) : $X=A^*X+B^*$.

   Préciser les coefficients a^*_{ij} de A^*, et b^*_i de B^*. [S]
3. Montrer qu'il existe λ dans $[0,1[$ tel que : $\forall\, i=1,\ldots,n,\ \sum\limits_{j=1}^{n}|a^*_{ij}|\leq\lambda$. [S]
4. Soit $X^{(0)}\in\mathbb{K}^n$. On définit une suite de $\mathbb{K}^n$ en posant : $\forall\, k,\ X^{(k+1)}=A^*X^{(k)}+B^*$.

   Pour tout entier k, on pourra noter $X^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)})$.

   Montrer que : $\forall\, k\in\mathbb{N}^*,\ \|\widetilde{X}-X^{(k)}\|\leq\lambda^k\|\widetilde{X}-X^{(0)}\|$.

   En déduire que $\lim\limits_{k\to\infty}X^{(k)}=\widetilde{X}$. [S]
5. Application numérique
   (a) Résoudre le système (1) : $\left\{\begin{array}{rcl}400x+24y-8z&=&30\\9x+300y-15z&=&60\\4x-8y+400z&=&50\end{array}\right.$

   On en donnera la solution exacte, et la solution approchée à 10^{-10} près. [S]

   (b) Vérifier les hypothèses des questions précédentes.

   Écrire la forme $X=A^*X+B^*$ du système. Que vaut λ ? [S]

   (c) On part de $X^{(0)}=(0,0,0)$. Préciser $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$, et $X^{(4)}$.

   En considérant uniquement $X^{(1)}$, montrer que $\|\widetilde{X}\|\leqslant\frac{5}{23}$.

   A partir de quel entier k est-on certain que $\|\widetilde{X}-X^{(k)}\|\leq10^{-16}$? [S]

Problème 2

Inversion d'une matrice

L'objectif de ce problème est l'obtention d'une méthode permettant d'inverser certaines matrices symétriques réelles.

Préliminaire

Soit $D \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux deux à deux distincts.

Montrer que si une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ commute avec D alors M est diagonale.

Partie I

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle inversible.

On suppose qu'il existe une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux distincts telles que $AP = PD$.

1. Etablir ${}^tPA = D\,{}^tP$.

2 En exploitant le préliminaire, établir que ${}^tPP$ est une matrice diagonale que l'on notera Δ.

3. On note $p_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de P et δ_k le k ème coefficient diagonal de Δ.

3.a Exprimer δ_k à l'aide d'un symbole sommatoire et des $p_{i,j}$.

3.b On suppose désormais qu'aucune colonne de P n'est nulle.
Justifier que Δ, P et D sont inversibles.

4.a Exprimer l'inverse de A en fonction de $P, {}^tP, \Delta^{-1}$ et D^{-1}.

4.b On note λ_k le k ème coefficient diagonal de la matrice D.
On note $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ les coefficients d'indice (i,j) des matrices A et A^{-1}.

Etablir $b_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{p_{i,k}p_{j,k}}{\lambda_k \delta_k}$.

Partie II

On considère ici la matrice symétrique : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. On pose $D_n = \det A$.

1.a Former une relation de récurrence engageant D_n, D_{n-1} et D_{n-2}.

1.b Donner l'expression de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.c La matrice A est-elle inversible ?

2. Soit k un entier tel que $1 \le k \le n$.

2.a Justifier, pour tout $1 \le i \le n$, la relation :

$$\sin\left(\frac{(i-1)k\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{(i+1)k\pi}{n+1}\right) = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right).$$

2.b On note : $X_k = \left(\sin\left(\dfrac{ik\pi}{n+1}\right)\right)_{1\leq i\leq n} = \begin{pmatrix} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right) \\ \sin\left(\dfrac{2k\pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\dfrac{nk\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Observer qu'il existe un réel λ_k tel que $AX_k = \lambda_k X_k$ et exprimer ce dernier.

2.c On note P la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Observer qu'il existe une matrice diagonale D telle que

a) $AP = PD$

b) les coefficients diagonaux de D sont deux à deux distincts.

3. On peut désormais reprendre les notations de la partie I

3.a Expliciter $p_{i,j}$.

3.b Ici x désigne un réel de l'intervalle $]0,\pi[$.

Justifier la relation : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \cos 2px = \frac{\sin nx}{\sin x}\cos(n+1)x$.

En déduire une expression en fonction de n et x de la somme : $S_n(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sin^2 px$.

3.c Observer que la valeur de δ_k ne dépend pas de k et donner celle-ci.

4. En déduire le coefficient de la ligne i et de la colonne j de l'inverse de A.

Corrigé Problème 1

1. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $X \neq \overrightarrow{0}$ dans $\mathbb{K}^n$, tel que $AX = 0$.

   Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i| = \|X\| > 0$.

   L'égalité $AX = \overrightarrow{0}$ implique en particulier $\sum_j a_{ij}x_j = 0$ donc $a_{ii}x_i = -\sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j$.

   Mais $\left|\sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j\right| \leqslant \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|\, |x_j| \leqslant |x_i| \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |x_i|\, |a_{ii}|$: c'est contradictoire.

   Ainsi pour tout X de $\mathbb{K}^n$, on a $AX = \overrightarrow{0} \Rightarrow X = \overrightarrow{0}$. Cela signifie que l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est injectif donc bijectif. Ainsi A est inversible. [Q]

2. Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, la i-ième équation de (1) s'écrit : $a_{ii}x_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j = b_i$.

   Elle s'écrit donc $x_i = \sum_{j=1}^{n} a^*_{ij}x_j + b^*_i$, avec $a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } j = i \\ -a_{ij}/a_{ii} \text{ si } j \neq i \end{cases}$ et $b^*_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$.

   On a ainsi obtenu $A^* = (a^*_{ij})$ et $B^* = (b^*_i)$ tels que $AX = B \Leftrightarrow X = A^*X + B^*$. [Q]

3. Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, posons $\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \left|a^*_{ij}\right|$. On a $\lambda_i = \dfrac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j\neq i} |a_{ij}| < 1$.

   Il suffit alors de choisir $\lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i$ pour conclure. [Q]

4. Pour tout $k \geqslant 1$, on a $X^{(k)} = A^*X^{(k-1)} + B^*$. D'autre part $\widetilde{X} = A^*\widetilde{X} + B^*$.

   Par soustraction, on obtient $\widetilde{X} - X^{(k)} = A^*(\widetilde{X} - X^{(k-1)})$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$.

   Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, la i-ième ligne de cette égalité s'écrit $\widetilde{x}_i - x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a^*_{ij}(\widetilde{x}_j - x_j^{(k-1)})$.

   Ainsi $|\widetilde{x}_i - x_i^{(k)}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left|a^*_{ij}\right|\, |\widetilde{x}_j - x_j^{(k-1)}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left|a^*_{ij}\right|\, \|\widetilde{X} - X^{(k-1)}\| \leqslant \lambda\, \|\widetilde{X} - X^{(k-1)}\|$.

   Il en découle $\|\widetilde{X} - X^{(k)}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\widetilde{x}_i - x_i^{(k)}| \leqslant \lambda\, \|\widetilde{X} - X^{(k-1)}\|$.

   Une récurrence évidente donne alors : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \|\widetilde{X} - X^{(k)}\| \leqslant \lambda^k\, \|\widetilde{X} - X^{(0)}\|$.

   Ainsi, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$ et tout k de $\mathbb{N}^*$, on a $|\widetilde{x}_i - x_i^{(k)}| \leqslant \lambda^k\, \|\widetilde{X} - X^{(0)}\|$.

   On sait que $0 \leqslant \lambda < 1$. Il en résulte $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = \widetilde{x}_i$, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$.

   Autrement dit, la suite des vecteurs $X^{(k)}$ converge vers $\widetilde{X}$ quand k tend vers $+\infty$.

   Remarque : ce résultat est indépendant du choix du vecteur initial $X^{(0)}$. [Q]

5. Application numérique

   (a) On applique la méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix} 400 & 24 & -8 & | & 30 \\ 9 & 300 & -15 & | & 60 \\ 4 & -8 & 400 & | & 50 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1/8 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2/3 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3/4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 50 & 3 & -1 & | & 15/4 \\ 3 & 100 & -5 & | & 20 \\ 1 & -2 & 100 & | & 25/2 \end{pmatrix} \ \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 100 & | & 25/2 \\ 3 & 100 & -5 & | & 20 \\ 50 & 3 & -1 & | & 15/4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 50\mathrm{L}_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 100 & | & 25/2 \\ 0 & 106 & -305 & | & -35/2 \\ 0 & 103 & -5001 & | & -2485/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{L}_2 \leftarrow \\ \mathrm{L}_2-\mathrm{L}_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 100 & | & 25/2 \\ 0 & 3 & 4696 & | & 2415/4 \\ 0 & 103 & -5001 & | & -2485/4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{L}_3 \leftarrow \\ 3\mathrm{L}_3-103\mathrm{L}_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 100 & | & 25/2 \\ 0 & 3 & 4696 & | & 2415/4 \\ 0 & 0 & -498691 & | & -64050 \end{pmatrix}$$

Le système intial est donc équivalent à $\left\{\begin{array}{rrrl} x & -2y & +100z & = 25/2 \\ & 3y & +4696z & = 2415/4 \\ & & -498691z & = -64050 \end{array}\right.$

On trouve d'abord $z = \dfrac{64050}{498691} \approx 0.1284362461$;

Ensuite $y = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2415}{4} - 4696\,\dfrac{64050}{498691}\right) = \dfrac{1223565}{5984292} \approx 0.2044627836$;

Enfin $x = \dfrac{25}{2} + \dfrac{1223565}{2992146} - \dfrac{6405000}{498691} = \dfrac{32565}{498691} \approx 0.0653009579$;

La solution est $(0.0653009579\ ;\ 0.2044627836\ ;\ 0.1284362461)$ à 10^{-10} près. [Q]

(b) Le système à résoudre est de façon évidente à diagonale strictement dominante.

On a l'équivalence $\left\{\begin{array}{rcl} 400x+24y-8z & = & 30 \\ 9x+300y-15z & = & 60 \\ 4x-8y+400z & = & 50 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{40} - \frac{3}{50}\,y + \frac{1}{50}\,z \\ y = \frac{1}{5} - \frac{3}{100}\,x + \frac{1}{20}\,z \\ z = \frac{1}{8} - \frac{1}{100}\,x + \frac{1}{50}\,y \end{array}\right.$

On a ainsi obtenu la forme $X = A^*X + B^*$ du système.

Avec les notations de (I.3) on a :

$\lambda_1 = \frac{3}{50} + \frac{1}{50} = \frac{2}{25}$, $\lambda_2 = \frac{3}{100} + \frac{1}{20} = \frac{2}{25}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{100} + \frac{1}{50} = \frac{3}{100}$.

On en déduit $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \frac{2}{25}$. [Q]

(c) Pour tout $k \geqslant 1$, on a $X^{(k)} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \\ z^{(k)} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{100}\begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{(k-1)} \\ y^{(k-1)}+ \\ z^{(k-1)} \end{pmatrix} + \dfrac{1}{40}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

On trouve tout d'abord $X^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{40} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = (0.075 \quad 0.2 \quad 0.125)$.

Ensuite $X^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{131}{2000} & \frac{5}{250} & \frac{513}{4000} \end{pmatrix} = (0.0655 \quad 0.204 \quad 0.12825)$.

Ensuite $X^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{2613}{40000} & \frac{81779}{400000} & \frac{5137}{40000} \end{pmatrix} = (0.065325 \quad 0.2044475 \quad 0.128425)$.

Enfin $X^{(4)} = \begin{pmatrix} \frac{1306033}{20000000} & \frac{408923}{2000000} & \frac{1284357}{10000000} \end{pmatrix} = (0.06530165 \quad 0.2044615 \quad 0.1284357)$.

Pour $k \geqslant 1$, on a $\|\widetilde{X} - X^{(k)}\| \leqslant \left(\frac{2}{25}\right)^k \|\widetilde{X}\|$ et notamment $\|\widetilde{X} - X^{(1)}\| \leqslant \frac{2}{25}\|\widetilde{X}\|$.

On en déduit $\|\widetilde{X}\| - \|X^{(1)}\| \leqslant \frac{2}{25}\|\widetilde{X}\|$, donc $\|\widetilde{X}\| \leqslant \frac{25}{23}\|X^{(1)}\| = \frac{5}{23}$.

Ainsi, pour tout $k \geqslant 1$, on peut écrire : $\|\widetilde{X} - X^{(k)}\| \leqslant \varepsilon_k$, avec $\varepsilon_k = \frac{5}{23}\left(\frac{2}{25}\right)^k$.

On constate que $\varepsilon_{13} \approx 1.2\,\mathrm{E}{-15}$ et que $\varepsilon_{14} \approx 0.96\,\mathrm{E}{-16}$.

Ainsi on est sûr que $\|\widetilde{X} - X^{(k)}\| < 10^{-16}$ à partir de $k = 14$. [Q]

Correction

d'après INA 1998

Préliminaire :

$D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ avec $\forall 1\le i,j\le n,\lambda_i=\lambda_j\Rightarrow i\ne j$. $M=(m_{i,j})$.
On a $MD=(\lambda_j m_{i,j})$ et $DM=(\lambda_i m_{i,j})$.
Si $MD=DM$ alors $\forall 1\le i,j\le n,\lambda_j m_{i,j}=\lambda_i m_{i,j}$ d'où $\forall 1\le i\ne j\le n, m_{i,j}=0$ et ainsi M apparaît comme étant diagonale.

Partie I

1. ${}^t(AP)={}^t(DP)$ donne ${}^tP\,{}^tA={}^tD\,{}^tP$ puis ${}^tPA=D\,{}^tP$ car A et D sont des matrices symétriques.

2. ${}^tPPD={}^tPAP=D\,{}^tPP$ donc ${}^tPP$ commute avec D et par suite ${}^tPP$ est diagonale.

3.a $P=(p_{i,j}),{}^tP=(p'_{j,i})$ avec $p'_{j,i}=p_{i,j}$.

Par produit matriciel : $\delta_k=\sum_{i=1}^n p'_{k,i}p_{i,k}=\sum_{i=1}^n p_{i,k}^2$.

3.b Si aucune colonne de P n'est nulle alors $\forall 1\le k\le n,\delta_k\ne 0$.
Par suite Δ est inversible.
Comme ${}^tPP=\Delta$ on a $(\det P)^2=\det\Delta\ne 0$ et donc P inversible.
Comme $D=P^{-1}AP$ avec A inversible, on a aussi D inversible.

4.a Comme ${}^tPP=\Delta$ on a $P^{-1}=\Delta^{-1t}P$. De plus $A=PDP^{-1}$ donc
$A^{-1}=PD^{-1}P^{-1}=PD^{-1}\Delta^{-1}\,{}^tP$.

4.b $D^{-1}=\operatorname{diag}(1/\lambda_1,\ldots,1/\lambda_n)$, $\Delta^{-1}=\operatorname{diag}(1/\delta_1,\ldots,1/\delta_n)$ donc
$D^{-1}\Delta^{-1}=\operatorname{diag}(1/\lambda_1\delta_1,\ldots,1/\lambda_n\delta_n)$.

$PD^{-1}\Delta^{-1}=(q_{i,j})$ avec $q_{i,j}=\dfrac{p_{i,j}}{\lambda_j\delta_j}$ et

$A^{-1}=PD^{-1}\Delta^{-1}\,{}^tP=(b_{i,j})$ avec $b_{i,j}=\sum_{k=1}^n q_{i,k}p'_{k,j}=\sum_{k=1}^n \dfrac{p_{i,k}p_{j,k}}{\lambda_k\delta_k}$.

Partie II

1.a En développant selon la première colonne :

$$D_n=2D_{n-1}+\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ -1 & 2 & -1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & & & -1 & 2\end{vmatrix}_{[n-1]}$$

puis en développant selon la première ligne :
$D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$.

1.b (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2
Sachant $D_1=2$ et $D_2=3$ on obtient $D_n=n+1$.

1.c oui

2.a développer les sinus.

2.b Posons $Y_k = AX_k = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $2 \leq i \leq n-1$: $y_i = -\sin\frac{(i-1)k\pi}{n+1} + 2\sin\frac{ik\pi}{n+1} - \sin\frac{(i+1)k\pi}{n+1}$

et de plus cette formule vaut aussi pour $i=1$ et $i=n$.

Pour tout $1 \leq i \leq n$: $y_i = (2-2\cos\frac{k\pi}{n+1})\sin\frac{ik\pi}{n+1}$

donc $Y_k = AX_k = \lambda_k X_k$ avec $\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$.

2.c AP est la matrice de colonnes $\lambda_1 X_1, \ldots, \lambda_n X_n$.

Pour $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, PD a pour colonnes $\lambda_1 X_1, \ldots, \lambda_n X_n$.

Donc $AP = DP$.

De plus les coefficients diagonaux de D sont deux à deux distincts puisque la fonction cosinus est injective sur $[0, \pi]$.

3.a $p_{i,j} = \sin\frac{ij\pi}{n+1}$.

3.b $\sum_{p=1}^{n} \cos 2px = \mathrm{Re}\left(\sum_{p=1}^{n} \mathrm{e}^{2ipx}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2ix}\frac{1-\mathrm{e}^{2inx}}{1-\mathrm{e}^{2ix}}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i(n+1)x}\frac{\sin nx}{\sin x}\right) = \frac{\sin nx}{\sin x}\cos(n+1)x$.

$S_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \sin^2 px = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}(1-\cos 2px) = \frac{n}{2} - \frac{\sin nx}{2\sin x}\cos(n+1)x$.

3.c $\delta_k = \sum_{i=1}^{n} p_{i,k}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sin^2\frac{ik\pi}{n+1} = \frac{n}{2} - (-1)^k \frac{\sin\frac{nk\pi}{n+1}}{2\sin\frac{k\pi}{n+1}} = \frac{n+1}{2}$

car $\sin\frac{nk\pi}{n+1} = \sin\left(k\pi - \frac{k\pi}{n+1}\right) = (-1)^{k-1}\sin\frac{k\pi}{n+1}$.

4. Le coefficient voulu est $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{ik\pi}{n+1}\sin\frac{jk\pi}{n+1}}{(2-2\cos\frac{k\pi}{n+1})\frac{n+1}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{ik\pi}{n+1}\sin\frac{jk\pi}{n+1}}{2(n+1)\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}}$.