CORRIGÉ PB DUALITÉ

PARTIE A

1.
- $A^\circ \neq \emptyset$ car la forme linéaire nulle appartient à A°.
- Si $\varphi, \psi \in A^\circ$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $\forall x \in A,\ (\lambda\varphi + \psi)(x) = \lambda\varphi(x) + \psi(x) = 0$ donc $\lambda\varphi + \psi \in A^\circ$.

  Ainsi, A° est un sev de E^*.

2. Supposons $A \subset B$. Soit $\varphi \in B^\circ$. Alors, pour tout $x \in B$, $\varphi(x) = 0$ donc a fortiori $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in A$.
Ainsi, $\varphi \in A^\circ$, d'où : $B^\circ \subset A^\circ$.

3.
- $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ donc, d'après la question précédente, $(A \cup B)^\circ \subset A^\circ$ et $(A \cup B)^\circ \subset B^\circ$ donc $(A \cup B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$.
- Soit $\varphi \in A^\circ \cap B^\circ$. $\varphi \in A^\circ$ donc pour tout $x \in A$, $\varphi(x) = 0$, et $\varphi \in B^\circ$ donc pour tout $x \in B$, $\varphi(x) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in A \cup B$, $\varphi(x) = 0$ donc $\varphi \in (A \cup B)^\circ$, ce qui donne l'inclusion $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$.

  Finalement, on a bien l'égalité : $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

4.
- $A \subset \mathrm{Vect}(A)$ donc $(\mathrm{Vect}(A))^\circ \subset A^\circ$ d'après A.2.
- Soit $\varphi \in A^\circ$, i.e $\forall x \in A,\ \varphi(x) = 0$. Pour tout $y \in \mathrm{Vect}(A)$, il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$, à support fini, et une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de A tels que $y = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.

  On a alors : $\varphi(y) = \sum_{i\in I} \lambda_i \varphi(x_i) = 0$ (car φ linéaire et $x_i \in A$). Donc $\varphi \in (\mathrm{Vect}(A))^\circ$, et $A^\circ \subset (\mathrm{Vect}(A))^\circ$.

  Finalement on a bien : $A^\circ = (\mathrm{Vect}(A))^\circ$.

5.
- Démontrons d'abord le résultat suivant :
  Si H et H' sont deux hyperplans de E tels que $H \subset H'$, alors $H = H'$.

  C'est facile en dimension finie, bien sûr. Dans le cas général, soient H et H' deux hyperplans de E, et supposons H strictement inclus dans H'. Alors il existe a appartenant à H' mais pas à H. D'après le cours, on sait que $E = H \oplus \mathbb{K}.a$. On devrait donc avoir $E \subset H'$, contradiction.
- Soit A un hyperplan de E. On sait d'après le cours qu'il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $A = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Donc $\varphi \in A^\circ$, et $\mathbb{K}.\varphi \subset A^\circ$.
- D'autre part, si $\psi \in A^\circ$, on a $A \subset \mathrm{Ker}\,\psi$ donc, soit $\psi = 0$, soit $\psi \neq 0$, et alors $\mathrm{Ker}\,\psi$ est un hyperplan, d'où $A = \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$ d'après le résultat préliminaire. D'après le cours, il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.
  Dans les deux cas, on a $\psi = \lambda\varphi$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, donc $\psi \in \mathbb{K}.\varphi$, et $A^\circ \subset \mathbb{K}.\varphi$.

  Finalement, $A^\circ = \mathbb{K}.\varphi$ est une droite vectorielle de E^*.

6.
- $E^\circ = \{0\}$. En effet : $\varphi \in E^\circ \iff \forall x \in E,\ \varphi(x) = 0 \iff \varphi = 0_{E^*}$.
- Démontrons d'abord le résultat indiqué par l'énoncé :
  Si A est un sous-espace vectoriel de E strictement inclus dans E, il existe un hyperplan H de E tel que $A \subset H$.

  Là encore, c'est facile en dimension finie en utilisant le théorème de la base incomplète... Dans le cas général, si A est strictement inclus dans E, soit A' un supplémentaire de A. Il existe alors une forme linéaire non nulle φ' sur A' (car A' n'est pas réduit à $\{0\}$). On peut alors construire une forme linéaire φ sur E telle que la restriction de φ à A soit nulle, et que la restriction de φ à A' soit égale à φ'.
  Ainsi, φ est une forme linéaire non nulle ; son noyau est donc un hyperplan, qui contient A par construction.
- Supposons donc $A^\circ = \{0\}$, et, par l'absurde, $A \subsetneq E$. D'après ce qui précède, il existe un hyperplan H tel que $A \subset H$. Alors $H^\circ \subset A^\circ$, donc A° contient une droite vectorielle : contradiction.

  Finalement, on a bien l'équivalence : $A^\circ = \{0\} \iff A = E$.

7.
- Il est clair que $\{0\}^\circ = E^*$, puisque, pour tout $\varphi \in E^*$, $\varphi(0) = 0$.

- Soit A un sous-espace vectoriel de E tel que $A^\circ = E^*$. Supposons, par l'absurde, $A \neq \{0\}$. Il existe alors $a \in A$, $a \neq 0$. En notant H un hyperplan supplémentaire de $\mathbb{K}.a$, on peut alors trouver $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 0$ si $x \in H$ et $\varphi(a) = 1$ (cf. cours).
  Ainsi, $\varphi \in E^*$ et $\varphi \notin A^\circ$: contradiction.
  Finalement, on a bien l'équivalence : $\underline{A^\circ = E^* \iff A = \{0\}}$.

PARTIE B

1. Démonstration "duale" de celle de A.1...
2. Démonstration "duale" de celle de A.2...
3. Démonstration "duale" de celle de A.3...
4. Démonstration "duale" de celle de A.4...
5. Si $x \in A$ alors : $\forall \varphi \in A^\circ$, $\varphi(x) = 0$ (par définition même de A°), donc $x \in (A^\circ)^\circ$ d'où $\underline{A \subset (A^\circ)^\circ}$.
6. - Supposons, par l'absurde, $(E^*)^\circ \neq \{0\}$. Il existe donc $a \in (E^*)^\circ$ tel que $a \neq 0$. On aurait donc : $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi(a) = 0$. Or il est facile de construire une forme linéaire φ telle que $\varphi(a) = 1$ (cf. A.7 et cours), d'où la contradiction.
     Finalement, on a bien l'implication $\underline{A' = E^* \Rightarrow A'^\circ = \{0\}}$.
   - Contre-exemple pour l'inclusion réciproque :
     Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons φ_n la forme linéaire sur E qui, à tout polynôme P, associe le réel $P(n)$, et soit $A' = \text{Vect}(\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\})$.
     On a alors : $P \in (A')^\circ \iff \forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = 0 \iff P = 0$ (car un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul).
     Donc $(A')^\circ = \{0\}$. Mais on n'a pas $A' = E^*$! En effet, soit $a \notin \mathbb{N}$. Alors, la forme linéaire φ_a qui à tout polynôme P associe $P(a)$ n'appartient pas à A' : sinon, il existerait $N \in \mathbb{N}$ et des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_N$ tels que $\varphi_a = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \varphi_i$, et on aurait $P(a) = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i P(i)$ pour tout polynôme P, ce qui est absurde comme on le voit en considérant $P = \prod_{k=0}^{N} (X - k)$...

PARTIE C

1. - On vérifie d'abord que l'on a bien, pour toute $\varphi \in F^*$, ${}^t u(\varphi) \in E^*$! ($\varphi \circ u$ est linéaire comme composée d'applications linéaires).
   - Puis : $\forall \varphi, \psi \in F^*$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, ${}^t u(\lambda\varphi + \psi) = (\lambda\varphi + \psi) \circ u = \lambda\varphi \circ u + \psi \circ u = \lambda {}^t u(\varphi) + {}^t u(\psi)$, donc $\underline{{}^t u \text{ est une application linéaire de } F^* \text{ dans } E^*}$.
2. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, pour toute $\varphi \in F^*$:
   $$\begin{aligned} {}^t(\lambda u + v)(\varphi) &= \varphi \circ (\lambda u + v) = \lambda\varphi \circ u + \varphi \circ v \\ &= \lambda {}^t u(\varphi) + {}^t v(\varphi) = (\lambda {}^t u + v)(\varphi) \end{aligned}$$
   d'où $\underline{{}^t(\lambda u + v) = \lambda {}^t u + {}^t v \text{ : la transposition est linéaire.}}$
3. Pour toute $\varphi \in G^*$, on a : ${}^t(v \circ u)(\varphi) = \varphi \circ v \circ u$ et ${}^t u \circ {}^t v(\varphi) = {}^t u(\varphi \circ v) = \varphi \circ v \circ u$
   donc $\underline{{}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v}$.
4. Pour toute $\varphi \in E^*$, on a : ${}^t(\text{Id}_E)(\varphi) = \varphi \circ \text{Id}_E = \varphi = \text{Id}_{E^*}(\varphi)$ donc $\underline{{}^t(\text{Id}_E) = \text{Id}_{E^*}}$.
5. Soit A un sous-espace vectoriel de E stable par u. Soit $\varphi \in A^\circ$. Pour tout $x \in A$, ${}^t u(\varphi)(x) = \varphi[u(x)] = 0$ car $u(x) \in A$. Donc ${}^t u(\varphi) \in A^\circ$, c'est-à-dire $\underline{A^\circ \text{ est stable par } {}^t u}$.
6. Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est bijective, alors $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$ et on a, d'après les questions précédentes :
   $${}^t(u \circ u^{-1}) = {}^t(\text{Id}_F) = \text{Id}_{F^*} \text{ donc } {}^t(u^{-1}) \circ {}^t u = \text{Id}_{F^*}$$
   et aussi
   $${}^t(u^{-1} \circ u) = {}^t(\text{Id}_E) = \text{Id}_{E^*} \text{ donc } {}^t u \circ {}^t(u^{-1}) = \text{Id}_{E^*}$$
   Ces *deux* relations montrent que $\underline{{}^t u \text{ est bijective de } F^* \text{ dans } E^*}$ et que $\underline{({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})}$.

7. a)
$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}({}^t u) &= \{\varphi \in F^*,\ \varphi \circ u = 0\}\\ &= \{\varphi \in F^* \text{ tq } \forall x \in E,\ \varphi[u(x)] = 0\}\\ &= \{\varphi \in F^* \text{ tq } \forall y \in \operatorname{Im} u,\ \varphi(y) = 0\}\\ &= (\operatorname{Im} u)^\circ\end{aligned}$$

b) On en déduit facilement, compte tenu des questions précédentes :

$$\begin{aligned}\underline{u \text{ surjective}} &\iff \operatorname{Im} u = F\\ &\iff (\operatorname{Im} u)^\circ = F^\circ = \{0\} \text{ d'après A.6}\\ &\iff \operatorname{Ker}({}^t u) = \{0\}\\ &\iff \underline{{}^t u \text{ injective}}\end{aligned}$$

8. a) • Si $\psi \in \operatorname{Im}({}^t u)$, il existe $\varphi \in F^*$ telle que $\psi = \varphi \circ u$. Alors, pour tout $x \in \operatorname{Ker} u$, $\psi(x) = \varphi[u(x)] = 0$ donc $\psi \in (\operatorname{Ker} u)^\circ$.
Ainsi, $\underline{\operatorname{Im}({}^t u) \subset (\operatorname{Ker} u)^\circ}$.

• Soit $\psi \in (\operatorname{Ker} u)^\circ$. Alors, pour tout $x \in \operatorname{Ker} u$, $\psi(x) = 0$ soit $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} \psi$.
Soit alors S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. D'après un célèbre théorème du cours, la restriction $v = u|_S$ de u à S est un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.
Soit ensuite S' un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ dans F. On sait qu'on peut définir une application linéaire $u' : F \to E$ par : $\begin{cases} u'(y) = v^{-1}(y) & \text{si } y \in \operatorname{Im} u \\ u'(y) = 0 & \text{si } y \in S' \end{cases}$.
Posons alors $\varphi = \psi \circ u'$: $u' \in \mathscr{L}(F, E)$ et $\psi \in E^*$ donc $\varphi \in F^*$ et l'on a :

$$\forall x \in \operatorname{Ker} u \quad : \quad \varphi \circ u(x) = \varphi(0) = 0 = \psi(x)$$

$$\forall x \in S \quad : \quad \varphi \circ u(x) = \psi \circ u'[u(x)] = \psi(x) \text{ car } u' \circ u = \operatorname{Id}|_S$$

Ainsi, $\psi = \varphi \circ u = {}^t u(\varphi)$ donc $\psi \in \operatorname{Im}({}^t u)$.
On a donc l'inclusion $\underline{(\operatorname{Ker} u)^\circ \subset \operatorname{Im}({}^t u)}$, et, finalement, l'égalité.

b) On en déduit :

$$\begin{aligned}\underline{u \text{ injective}} &\iff \operatorname{Ker} u = \{0\}\\ &\iff (\operatorname{Ker} u)^\circ = E^* \text{ d'après A.7}\\ &\iff \operatorname{Im}({}^t u) = E^*\\ &\iff \underline{{}^t u \text{ surjective}}\end{aligned}$$

9. a) facile

b) facile

c) $\operatorname{Ker} \psi = \{x \in E,\ \hat{x} = 0\} = \{x \in E \text{ tq } \forall \varphi \in E^*,\ \varphi(x) = 0\} = (E^*)^\circ = \{0\}$ d'après B.6.
Donc $\underline{\psi \text{ est injective.}}$

PARTIE D

1. • Il est déjà facile de vérifier que les e_i^* sont bien des formes linéaires.

• La propriété : $\forall (i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $e_i{}^*(e_j) = \delta_{ij}$ est immédiate compte tenu de la définition de e_i^*.

• Montrons que la famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est libre.

En effet, si l'on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0_{E^*}$ alors, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_j) = 0\,,$$

ce qui implique $\lambda_j = 0$.

• Puisque $\dim E* = \dim E = n$, la famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est donc une base de E^*.

2. • $\dim E = \dim E^* = \dim E^{**}$ (cf. cours), et $\psi : E \to E^{**}$ est injective, donc c'est $\underline{\text{un isomorphisme de } E \text{ sur } E^{**}}$.

• Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de E^*. Alors $(\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*)$ est une base de E^{**} (cf. cours). Notons alors $e_i = \psi^{-1}(\varphi_i^*)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. ψ étant un isomorphisme, $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et l'on a :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ \varphi_i^* = \psi(e_i) = \hat{e}_i$$

$$\text{d'où : } \forall (i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2\ ,\ \delta_{ij} = \varphi_i^*(\varphi_j) = \hat{e}_i(\varphi_j) = \varphi_j(e_i)$$

ce qui prouve que $\underline{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \text{ est la base duale de } (e_1, \ldots, e_n)}$.

3. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F, que l'on complète en une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E.
Soit alors $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ sa base duale. Si $\varphi\in E^*$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $\varphi=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \mathrm{e}_i^*$. On a alors :

$$\begin{aligned}\varphi\in F^\circ &\iff \varphi\in(\{e_1,\dots,e_p\})^\circ \text{ car } F=\mathrm{Vect}(\{e_1,\dots,e_p\})\\ &\iff \forall j\in[\![1\,;p]\!]\ ,\ \varphi(e_j)=0\\ &\iff \forall j\in[\![1\,;p]\!]\ ,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i^*(e_j)=0\\ &\iff \forall j\in[\![1\,;p]\!]\ ,\ \lambda_j=0 \text{ car } e_i^*(e_j)=\delta_{ij}\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi\in F^\circ$ si et seulement si il existe $\lambda_{p+1},\dots,\lambda_n$ tels que $\varphi=\sum_{i=p+1}^{n}\lambda_i e_i^*$; F° est donc le sous-espace vectoriel de base $(e_{p+1}^*,\dots,e_n^*)$, et il est donc de dimension $n-p$.
Cela prouve que : $\underline{\dim(F)+\dim(F^\circ)=\dim(E).}$

4. Démonstration "duale" : on considère ici une base $(e_1^*,\dots,e_p^*)$ de F' que l'on complète en une base $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ de E^*. Puis on considère sa base ante-duale $(e_1,\dots,e_n)$; il suffit alors d'écrire les conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coordonnées d'un vecteur x dans cette base pour qu'il appartienne à F'°...

5. On a $F\subset(F^\circ)^\circ$ d'après B.5, et $\dim F=\dim(F^\circ)^\circ$ d'après les deux questions précédentes. La conclusion s'impose !

6. **a)** • On a : $A\cap B\subset A$ et $A\cap B\subset B$, d'où $A^\circ\subset(A\cap B)^\circ$ et $B^\circ\subset(A\cap B)^\circ$, donc $A^\circ+B^\circ\subset(A\cap B)^\circ$ (1) (il s'agit de sous-espaces vectoriels...).

• De plus : $\dim(A\cap B)^\circ=\dim E-\dim(A\cap B)$ et :

$$\begin{aligned}\dim(A^\circ+B^\circ)&=\dim A^\circ+\dim B^\circ-\dim(A^\circ\cap B^\circ) \text{ (formule de Grassmann)}\\ &=(\dim E-\dim A)+(\dim E-\dim B)-\dim(A\cup B)^\circ\\ &=(\dim E-\dim A)+(\dim E-\dim B)-\dim(\mathrm{Vect}(A\cup B))^\circ\\ &=2\dim E-\dim A-\dim B-\dim((A+B)^\circ)\\ &=2\dim E-\dim A-\dim B-(\dim E-\dim(A+B))\\ &=\dim E-(\dim A+\dim B-\dim(A+B))=\dim E-\dim(A\cap B)\end{aligned}$$

donc $\dim(A^\circ+B^\circ)=\dim(A\cap B)^\circ$ (2).
De (1) et (2), on déduit : $\underline{(A\cap B)^\circ\ =\ A^\circ\ +\ B^\circ.}$

b) *Rem :* D'après la question A.5, si φ est une forme linéaire non nulle, on a $(\mathrm{Ker}\,\varphi)^\circ=\mathrm{Vect}(\{\varphi\})$, ce résultat restant valable même si $\varphi=0$ d'après A.6.

$(i)\Rightarrow(ii)$: si φ est combinaison linéaire des φ_i, soit $\varphi=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\varphi_i$, alors pour tout $x\in\bigcap_{i=1}^{p}\mathrm{Ker}\,\varphi_i$, on a $\varphi_i(x)=0$ pour tout i, d'où $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\varphi_i(x)=0$ et $x\in\mathrm{Ker}\,\varphi$.

Cela démontre l'inclusion $\bigcap_{i=1}^{p}\mathrm{Ker}\,\varphi_i\subset\mathrm{Ker}\,\varphi$.

• $(ii)\Rightarrow(i)$: supposons $\bigcap_{i=1}^{p}\mathrm{Ker}\,\varphi_i\subset\mathrm{Ker}\,\varphi$. Alors $(\mathrm{Ker}\,\varphi)^\circ\subset\left(\bigcap_{i=1}^{p}\mathrm{Ker}\,\varphi_i\right)^\circ=\sum_{i=1}^{p}(\mathrm{Ker}\,\varphi_i)^\circ$ d'après la question précédente (la propriété a été démontrée pour deux sous-espaces vectoriels, mais elle se généralise facilement à un nombre quelconque par récurrence).
Or, $(\mathrm{Ker}\,\varphi_i)^\circ=\mathrm{Vect}(\{\varphi_i\})$ et $(\mathrm{Ker}\,\varphi)^\circ=\mathrm{Vect}(\{\varphi\})$ d'après la remarque préliminaire, donc $\varphi\in\sum_{i=1}^{p}\mathbb{K}.\varphi_i$, c'est-à-dire que $\underline{\varphi\text{ est combinaison linéaires de }\varphi_i.}$

7. a) $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}({}^t u)$ découle immédiatement de : $\operatorname{Ker}({}^t u) = (\operatorname{Im} u)^\circ$, de D.2 et du théorème du rang (je vous laisse le soin d'écrire les égalités...).

b) Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ la matrice de u dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$, avec $\dim E = q$, $\dim F = p$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$ et $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$.

On a donc, par définition : $\forall k \in [\![1\,;q]\!]$, $u(e_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{ik} f_i$, d'où $f_j^* \circ u(e_k) = a_{jk}$ pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, soit ${}^t u(f_j^*)(e_k) = a_{jk}$ donc ${}^t u(f_j^*) = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} a_{ji} e_i^*$ (puisque $e_i^*(e_k) = \delta_{ik}$).

Le terme d'indice (i,j) (avec $1 \leqslant i \leqslant q$ et $1 \leqslant j \leqslant p$) de la matrice de ${}^t u$ dans les base $\mathscr{B}_E^*$ et $\mathscr{B}_F^*$ est donc a_{ji}, cette matrice est donc <u>la transposée de A.</u>

c) Le résultat découle immédiatement des deux questions précédentes.