Intégration (Segment) Devoir Maison N$^\circ$17

Ex DS (2005) CPGE MedV-Casablanca
With Courtesy to Prof. ELKARIMI

Formule d'Euler-Maclaurin et applications

Dans tout le probléme les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$

Partie 1 : Polynômes et nombres de Bernoulli .

1. Montrer qu'il existe une et une seule suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ telle que : $B_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$: $B'_n = nB_{n-1}$ et $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$.
2. Montrer que B_n est unitaire et de degré n ($\forall n \in \mathbb{N}$). Déterminer B_1, B_2 et B_3.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(t) = (-1)^n B_n(1-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que $B_0(1) = B_0(0) = 1$ et $B_1(1) = -B_1(0) = \frac{1}{2}$.
5. Montrer que $\forall n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = B_n(0)$. Montrer que : $\forall p \geq 1$, $b_{2p+1} = 0$.

Les polynômes B_n s'appellent les polynômes de Bernoulli et les nombres b_n s'appellent les nombres de Bernoulli

Partie 2 : Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin .

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $m \geq 1$, Montrer que :

$$f(0) = \int_0^1 f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{k!} f^{(k-1)}(x)|_0^1 + (-1)^{m+1} \int_0^1 \frac{B_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx \qquad (*)$$

   (Ind. par recurrence sur m, en utilisant des integrations par partie)
2. Pour$m \in \mathbb{N}$ on définit la fonction B_m^* par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $B_m^*(x) = B_m(x - [x])$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x). Montrer que B_m^* est périodique et déterminer sa période.
3. Montrer que pour $l \in \mathbb{N}$ on a : $\int_l^{l+1} f(x)B_r^*(x)dx = \int_0^1 f(x+l)B_r^*(x)dx$
4. Soit $l \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$f(l) = \int_l^{l+1} f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{k!} f^{(k-1)}(x)|_l^{l+1} + (-1)^{m+1} \int_l^{l+1} \frac{B_m^*(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx$$

   (ind. remplacer $f(x)$ par $f(x+l)$ dans la formule (*))

5. En déduire que pour $a, b \in \mathbb{N}$, et $m \geq 1$ on a la formle D'E-M :

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{k!} f^{(k-1)}(x)|_a^b + (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m^*(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx$$

6. En déduire que $\forall m \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x)|_a^b - \int_a^b \frac{B_{2m}^*(x)}{(2m)!} f^{(2m)}(x)dx \qquad (E-M)$$

(ind. utiliser question 6 partie 1)

Partie 3 : Applications .

Dans cette partie on suppose que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $f^{(2r)}$ intégrable sur $[1, +\infty[$ et que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{(k)}(x) = 0$.

Dans toute la suite on fixe $r \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que la fonction B_{2r}^* est bornée sur $\mathbb{R}$, en déduire que $f^{(2r)} B_{2r}^*$ est integrable sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_n^{+\infty} f^{(2r)}(x) B_{2r}^*(x)dx = 0$.
3. On pose $C(f) = \dfrac{1}{2} f(1) - \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(0) - \frac{1}{(2r)!} \int_1^{+\infty} f^{(2r)}(x) B_{2r}^*(x)dx$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$f(1)+\cdots+f(n) = \int_1^n f(x)dx + C(f) + \frac{1}{2} f(n) + \sum_{k=1}^{r} \frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + \frac{1}{(2r)!} \int_n^{+\infty} f^{(2r)}(x) B_{2r}^*(x)dx$$

4. Montrer que : $C(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[f(1) + \cdots + f(n) - \displaystyle\int_1^n f(x)dx \right]$.

Partie 4 : La somme $1+\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{n}$.

Dans cette question on considére la fonction $f : x \to \frac{1}{x}$.

1. Calculer les dérivées successives $f^{(k)}$, $k \geq 1$.
2. En déduire que f vérifie les hypothèses de la partie 3.
3. A l'aide de la question 4 partie 3, retrouver un résultat célèbre, comment s'appelle dans ce cas la contante $C(f)$, qu'on notera γ.
4. Montrer que
$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}-\sum_{k=1}^{r}\frac{b_{2k}}{2k.n^{2k}}+\int_n^{+\infty}x^{-2r-3}B^*_{2r+1}(x)dx$$
(Ind. appliquer la formule de la question 3 partie 3 à l'ordre $r+1$)
5. En déduire que :
$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}-\sum_{k=1}^{r}\frac{b_{2k}}{2k.n^{2k}}+O\left(\frac{1}{n^{2r+2}}\right)$$

Partie 5 : Formule de Stirling .

Dans cette partie on pose $f(x)=\ln(x)$.

1. Calculer les dérivées successives de f, en déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
2. Calculer $\int_1^n \ln(x)dx$.
3. En appliquant la formule de partie 3 question 3 pour $r=2$, montrer que :
$$\ln(n!)=n\ln(n)-n+1+\frac{1}{2}\ln(n)+C(f)+\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
(il suffit de remarquer que $b_4/4!f^{(3)}(n)+1/4!\int_n^{+\infty}B_4^*(x)f^{(4)}(x)dx=O\left(\frac{1}{n^3}\right)$)
4. On pose $u_n=\dfrac{n!e^{n-c}}{n^{n+\frac{1}{2}}}$, avec $c=1+C(f)$.
Montrer que : $\ln(un)=\dfrac{1}{12n}+O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$
5. Calculer $\lim u_n$, en déduire que : $n!\sim e^c n^n e^{-n}\sqrt{n}$.
6. Dans cette question on se propose de déterminer la valeur de la constante c. On pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)dx$.
   (a) Montrer que (I_n) est décroissante, et que $nI_n=(n-1)I_{n-2}$, puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1$.
   (b) Calculer I_{2n} et I_{2n+1} (on fera apparaître le factoriel.)
   (c) Montrer que la suite $(n+1)I_{n+1}I_n$ est constante, qu'elle est sa valeur. En déduire que $I_n\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
   (d) Montrer que $\dfrac{\pi}{2}=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)}$, en déduire que $\frac{\pi}{2}\sim\frac{ne^{2c}}{2(2n+1)}\sim\frac{e^{2c}}{4}$.(utiliser question 5)
   (e) Montrer alors que $c=\ln(\sqrt{2\pi})$. D'où la formule de Stirling : $n!\sim\sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

F I n