Manipulation des Sommes

Devoir Maison N° 3

Pour Jeudi 27 Septembre 2018

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $R_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(2i-3)$.
2. $T_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (2i+1)^3$.
3. $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i+j)^2$.

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'inégalité $\dfrac{2^{2n}}{2n+1} \leqslant \dbinom{2n}{n}$ (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton).

Exercice 4

Simplifier la somme suivante $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{i}{jk}$.

Exercice 5

Simplifier la somme suivante pour $p \in \mathbb{N}^*$. $U_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{p+i}{p}$.

Corrigé

Exercice 1

1. On a :
$$\begin{aligned} R_n &= 2\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{3n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(4n+2-9)}{6} = \frac{n(n+1)(4n-7)}{6}. \end{aligned}$$

2. En regroupant les termes d'indice pair et d'indice impair, on trouve :
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n+1} i^3 &= \sum_{i=1}^{n}(2i)^3 + \sum_{i=0}^{n}(2i+1)^3 \\ &= 8\sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=0}^{n}(2i+1)^3 \\ &= 2n^2(n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n}(2i+1)^3 \end{aligned}$$
Par conséquent, il vient :
$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}(2i+1)^3 &= \sum_{i=1}^{2n+1} i^3 - 2n^2(n+1)^2 \\ &= \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} - 2n^2(n+1)^2 \\ &= (2n+1)^2(n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 \\ &= (n+1)^2\big((2n+1)^2 - 2n^2\big) \\ &= (n+1)^2(2n^2+4n+1) \end{aligned}$$

3. On a $S_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(i+j)^2$. De plus, on calcule :
$$\sum_{i=1}^{j}(i+j)^2 = \sum_{k=j+1}^{2j} k^2 = \sum_{k=1}^{2j} k^2 - \sum_{k=1}^{j} k^2 = \frac{2j(2j+1)(4j+1)}{6} - \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} = \frac{14j^3+9j^2+j}{6}$$
On trouve alors :
$$S_n = \frac{1}{6}\left(\frac{7n^2(n+1)^2}{2} + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{12}n(n+1)(7n^2+13n+4).$$

Exercice 2 En utilisant la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} = nx\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

De plus, un changement d'indice et la formule du binôme donnent :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k}(1-x)^{n-1-k} = (x+1-x)^{n-1} = 1.$$

Ainsi, on trouve $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx$.

Exercice 3

On a $2^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$. De plus, on a $\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}$, $\forall k \in [\![0,2n]\!]$. Il vient alors $2^{2n} \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n}$. D'où l'inégalité $\dfrac{2^{2n}}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n}$.

Exercice 4 Comme $A_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{i}{jk} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n}\frac{i}{jk}$. On permutant l'ordre de sommation, on obtient :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{jk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{jk}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{jk}\frac{j(j+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\frac{(k+3)k}{2} = \frac{(n+7)n}{8}.$$

Exercice 5

Soit $i \in [\![0,n]\!]$. D'après la formule du triangle de Pascal, on a $\binom{p+i}{p} + \binom{p+i}{p+1} = \binom{p+i+1}{p+1}$. Il vient alors $\binom{p+i}{p} = \binom{p+i+1}{p+1} - \binom{p+i}{p+1}$. Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{i=0}^{n}\left[\binom{p+i+1}{p+1} - \binom{p+i}{p+1}\right] = \binom{p+n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} \quad \text{(somme télescopique)} \\ &= \binom{p+n+1}{p+1} \quad \text{car } \binom{p}{p+1} = 0. \end{aligned}$$

Fin