Devoir Maison N°5

Théorie des Ensembles

Mercredi 31 Octobre 2018

Pavages et clans (Niveau 3)

Rappels

Soit E un ensemble, et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties de E.

On rappelle que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \{x \in E, \exists\, i \in I, x \in A_i\}$ et que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \{x \in E, \forall\, i \in I, x \in A_i\}$.

Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de parties de E.

- On dit que cette suite est *croissante* si : $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.
- On dit qu'elle est *décroissante* si : $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}$.

Première Partie

Soit E un ensemble quelconque. Soit $\mathcal{P}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$.

On dit que $\mathcal{P}$ est un *pavage* si : $\forall\,(A, B) \in \mathcal{P}^2, \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P} \\ A \cap B \in \mathcal{P} \end{cases}$

On dit que le pavage $\mathcal{P}$ est *achevé* si :

- Pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ croissante d'éléments de $\mathcal{P}$, $\bigcup\limits_{n\geqslant 0} A_n$ est encore un élément de $\mathcal{P}$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ décroissante d'éléments de $\mathcal{P}$, $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} A_n$ est encore un élément de $\mathcal{P}$.

1. Vérifier que $\emptyset$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des pavages achevés de E. [S]
2. Donner tous les pavages de E quand $E = \emptyset$, ou $E = \{a\}$, ou $E = \{a, b\}$ [S].
3. Dans cette question, on suppose que E est un ensemble fini.

   Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante (ou décroissante) de parties de E.

   (a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est *stationnaire*.

   Autrement dit, il existe un entier p tel que, pour tout $n \geqslant p$, $A_n = A_p$. [S]

   (b) En déduire que tout pavage de E est achevé. [S]
4. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux pavages de E.

   (a) L'union $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ est-elle un pavage de E ? [S]

   (b) L'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est-elle un pavage de E ? [S]
5. Soit $\mathcal{P}$ un pavage de E.

   (a) Montrer que la famille des pavages achevés de E qui contiennent $\mathcal{P}$ est non vide.

   On note $\widehat{\mathcal{P}}$ l'intersection de tous les pavages de cette famille. [S]

   (b) Montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est lui-même un pavage achevé contenant $\mathcal{P}$. [S]

   (c) Réciproquement, montrer que si un pavage achevé contient $\mathcal{P}$, alors il contient $\widehat{\mathcal{P}}$.

   $\widehat{\mathcal{P}}$ est donc, au sens de l'inclusion, le plus petit pavage achevé contenant $\mathcal{P}$.

   On dit que $\widehat{\mathcal{P}}$ est le pavage achevé *engendré* par $\mathcal{P}$. [S]

   (d) A quelle condition a-t-on $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$? [S]

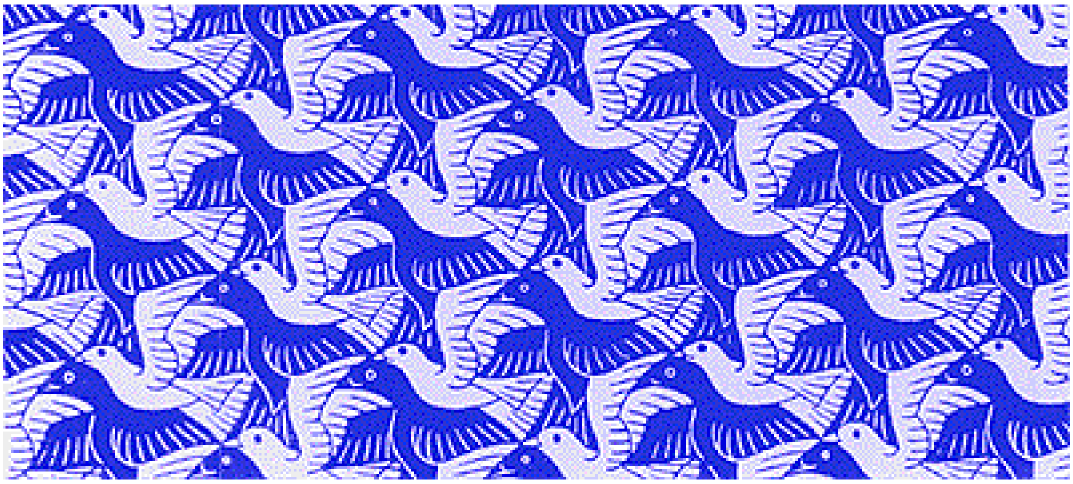
6. Soit $\mathcal{P}$ un pavage de E. On note $\mathcal{P}_m = \{B \subset E, \forall A \in \mathcal{P}, B \cap A \in \mathcal{P}\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{P}_m$ est un pavage de E qui contient $\mathcal{P}$. [S]
   (b) Montrer que si $\mathcal{P}$ est achevé, alors $\mathcal{P}_m$ est achevé. [S]

Deuxième Partie

Rappel : on note $\overline{F}$ le complémentaire dans E d'une partie F quelconque de E.

On dit qu'un pavage $\mathcal{P}$ de E est un *clan* si : $\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2, A \cap \overline{B} \in \mathcal{P}$.

1. Vérifier que $\emptyset$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des clans de E. [S]
2. Donner tous les clans de E quand $E = \emptyset$, ou $E = \{a\}$, ou $E = \{a, b\}$ [S].
3. Montrer que si $\mathcal{P}$ est un clan de E alors $\mathcal{P}_m$ est un clan de E. [S]
4. On se donne un clan $\mathcal{P}$ de E. On veut montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un clan de E.
   (a) Soit A une partie de E. On note $\mathcal{E}_A = \{B \subset E, A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}\}$.
   Montrer que est $\mathcal{E}_A$ est un pavage de E. [S]
   (b) Prouver que le pavage $\mathcal{E}_A$ est achevé. [S]
   (c) En déduire que si A appartient à $\mathcal{P}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans $\mathcal{E}_A$. [S]
   (d) Soit B une partie de E. On note $\mathcal{F}_B = \{A \subset E, A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}\}$.
   Montrer que est $\mathcal{F}_B$ est un pavage achevé de E. [S]
   (e) En déduire que si B appartient à $\widehat{\mathcal{P}}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans $\mathcal{F}_B$. [S]
   (f) Conclure. [S]



Exemple de pavages

Corrigé du problème

Première Partie

1. – Si $\mathcal{P} = \emptyset$, l'assertion $(A, B) \in \mathcal{P}^2 \Rightarrow \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P} \\ A \cap B \in \mathcal{P} \end{cases}$ est vraie, tout simplement parce que le prédicat $(A, B) \in \mathcal{P}^2$ est toujours faux (en effet l'ensemble $\mathcal{P}^2$ est vide.)

   Donc $\emptyset$ est un pavage de E.

   – Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$, l'assertion $(A, B) \in \mathcal{P}^2 \Rightarrow \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P} \\ A \cap B \in \mathcal{P} \end{cases}$ est toujours vraie.

   $\mathcal{P}(E)$ est donc également un pavage de E.

   [Q]
2. – Si $E = \emptyset$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$.

   Les pavages de E sont $\mathcal{P} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire les deux seules parties de $\mathcal{P}(E)$.

   – Si $E = \{a\}$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

   Les pavages de E sont $\mathcal{P} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P} = \{\{a\}\}$, et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$.

   Autrement dit, les quatres parties possibles de $\mathcal{P}(E)$ sont des pavages de E.

   – Si $E = \{a, b\}$:

   Dans ce cas $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Les pavages de E sont :

$\mathcal{P} = \emptyset$	$\mathcal{P} = \{\emptyset\}$	$\mathcal{P} = \{\{a\}\}$	$\mathcal{P} = \{\{b\}\}$
$\mathcal{P} = \{\{a, b\}\}$	$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}\}$	$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{b\}\}$	$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{a, b\}\}$
$\mathcal{P} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$	$\mathcal{P} = \{\{b\}, \{a, b\}\}$	$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$	$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$
$\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$			

   On remarque que les seules parties de $\mathcal{P}(E)$ qui ne sont pas des pavages de E sont :

   $$\{\{a\}, \{b\}\}, \quad \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \quad \text{et} \quad \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$$

   [Q]
3. (a) Soit $(A_n)_{n \geqslant 0}$ une suite croissante de parties de E.

   Supposons par l'absurde que cette suite ne soit pas stationnaire.

   En particulier, il existe un entier n_1 tel que $A_0 \subsetneq A_{n_1}$.

   On peut donc choisir un élément a_1 dans $A_{n_1} \setminus A_0$.

   De même, il existe un entier $n_2 > n_1$ tel que $A_{n_1} \subsetneq A_{n_2}$.

   On peut alors choisir un élément a_2 dans $A_{n_2} \setminus A_{n_1}$.

   L'étape suivante donne $n_3 > n_2$ tel que $A_{n_2} \subsetneq A_{n_3}$ et un élément a_3 dans $A_{n_3} \setminus A_{n_2}$.

   On peut alors itérer indéfiniment ce procédé et construire une suite strictement croissante $0 < n_1 < n_2 < \cdots$ d'entiers naturels et une suite d'éléments a_k de E distincts deux à deux par construction.

   On arrive ainsi à une absurdité car l'ensemble E est fini.

Conclusion : toute suite croissante de parties de E est stationnaire.

La démonstration est évidemment analogue pour ce qui est des suites décroissantes de parties de E (on pourrait également utiliser un passage au complémentaire pour transformer la suite décroissante en une suite croissante.) [Q]

(b) Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante (ou décroissante) de parties de E.

On sait que la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est *stationnaire* : $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant p,\ A_n = A_p$.

Dans ces conditions $\bigcup\limits_{n\geqslant 0} A_n = A_p$ et $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} A_n = A_p$ sont encore des éléments de $\mathcal{P}$.

Ainsi, tout pavage de E est un pavage achevé. [Q]

4. (a) La réponse est non en général. En effet, supposons par exemple $E = \{a, b\}$.

Alors $\mathcal{P}_1 = \{\{a\}\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{\{b\}\}$ sont des pavages, mais pas $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 = \{\{a\}, \{b\}\}$. [Q]

(b) La réponse est oui. Soient E un ensemble et $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ deux pavages de E.

Montrons que l'intersection $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est un pavage de E.

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}$, donc des éléments de $\mathcal{P}_1$ et de $\mathcal{P}_2$.

Puisque $\mathcal{P}_1$ est un pavage, $A \cup B$ et $A \cap B$ sont éléments de $\mathcal{P}_1$.

Pour la même raison, ils sont dans $\mathcal{P}_2$ et finalement dans $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Conclusion : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est un pavage. [Q]

5. (a) On sait que $\mathcal{P}(E)$ lui-même est un pavage de E, et il est évidemment achevé.

Il contient bien sûr le pavage $\mathcal{P}$. Ainsi l'ensemble des pavages achevés contenant $\mathcal{P}$ est non vide puisque $\mathcal{P}(E)$ en est un représentant. [Q]

(b) Il faut montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage, et que ce pavage est achevé.

Notons $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ l'ensemble des pavages achevés de E qui contiennent $\mathcal{P}$.

La question précédente a montré que $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} \neq \emptyset$: plus précisément $\mathcal{P}(E) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$.

– Soient A et B deux parties quelconques de E, toutes deux éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Il faut montrer que $A \cup B$ et $A \cap B$ sont encore des éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Soit $\mathcal{Q}$ un pavage achevé quelconque contenant $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$).

Par définition de $\widehat{\mathcal{P}}$, on a l'inclusion $\widehat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{Q}$.

Les ensembles A et B sont donc des éléments de $\mathcal{Q}$. Puisque celui-ci est un pavage, $A \cup B$ et $A \cap B$ sont encore éléments de $\mathcal{Q}$.

Ainsi $A \cup B$ et $A \cap B$ sont éléments de tout pavage achevé de E contenant $\mathcal{P}$, c'est-à-dire de tout élément de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$.

Les ensembles $A \cup B$ et $A \cap B$ sont donc éléments de l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ c'est-à-dire éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Ainsi $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage de E. Remarque : cette démonstration généralise celle qui a été vue dans la question précédente, et on peut finalement annoncer qu'une intersection *quelconque* de pavages est un pavage.

– Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de parties de E, toutes éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Si $\mathcal{Q}$ est un pavage achevé de E contenant $\mathcal{P}$, les A_n sont éléments de $\mathcal{Q}$.

Il en découle, par définition d'un pavage achevé, que $\bigcup\limits_{n\geqslant 0} A_n$ est élément de Q.

Ainsi cette réunion est élément de tous les pavages achevés $\mathcal{Q}$ contenant $\mathcal{P}$, donc élément de l'intersection $\widehat{\mathcal{P}}$ de ceux-ci.

On procèderait de même pour traiter le cas des suites $(A_n)_{n\geqslant 0}$ décroissantes.

Conclusion : le pavage $\widehat{\mathcal{P}}$ est achevé.

[Q]

(c) Soit $\mathcal{Q}$ un pavage achevé contenant $\mathcal{P}$.

Avec les notations précédentes, $\mathcal{Q}$ appartient à $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$.

Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, il est contenu dans chacun d'eux, donc en particulier dans $\mathcal{Q}$.

Ainsi $\widehat{\mathcal{P}}$ est le plus petit, au sens de l'inclusion, des pavages achevés contenant $\mathcal{P}$. [Q]

(d) Si $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$, alors $\mathcal{P}$ est lui-même un pavage achevé.

Réciproquement, si $\mathcal{P}$ est un pavage achevé, il est bien évidemment le plus petit, au sens de l'inclusion, des pavages achevés contenant $\mathcal{P}$: il est donc égal à $\widehat{\mathcal{P}}$.

Conclusion : $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$ si et seulement si le pavage $\mathcal{P}$ est achevé. [Q]

6. (a) Tout d'abord $\mathcal{P}_m$ est bien une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Soient X, Y deux éléments de $\mathcal{P}_m$.

Montrons que $X \cup Y$ et $X \cap Y$ sont dans P_m.

Pour cela, on se donne un élément quelconque B de $\mathcal{P}$.

On a $(X \cup Y) \cap B = (X \cap B) \cup (Y \cap B)$ et $(X \cap Y) \cap B = X \cap (Y \cap B)$.

Par définition de $\mathcal{P}_m$, les ensembles $X \cap B$ et $Y \cap B$ sont éléments de $\mathcal{P}$.

Celui-ci étant un pavage, la réunion $(X \cap B) \cup (Y \cap B)$ est dans $\mathcal{P}$.

De même $\begin{cases} Y \cap B \in \mathcal{P} \\ X \in \mathcal{P}_m \end{cases} \Rightarrow X \cap (Y \cap B) \in \mathcal{P}$.

Ainsi, pour tout élément B de $\mathcal{P}$, $(X \cup Y) \cap B$ et $(X \cap Y) \cap B$ sont dans $\mathcal{P}$.

Cela signifie que $X \cup Y$ et $X \cap Y$ sont dans $\mathcal{P}_m$.

D'autre part, pour tout B de $\mathcal{P}$, on a : $\forall A \in \mathcal{P}, B \cap A \in P$. cela signifie que les éléments B de $\mathcal{P}$ sont aussi éléments de $\mathcal{P}_m$. Autrement dit $\mathcal{P}$ est inclus dans $\mathcal{P}_m$.

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{P}_m$ est un pavage contenant $\mathcal{P}$. [Q]

(b) On suppose maintenant que $\mathcal{P}$ est achevé.

Montrons que $\mathcal{P}_m$ est achevé.

Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante, pour l'inclusion, d'éléments de $\mathcal{P}_m$.

Il faut prouver que $\bigcup\limits_{n\geqslant 0} A_n$ est encore dans $\mathcal{P}_m$. Fixons B dans $\mathcal{P}$.

Il suffit de vérifier que $B \cap \Big(\bigcup\limits_{n\geqslant 0} A_n\Big)$ est dans $\mathcal{P}$. Or $B \cap \Big(\bigcup\limits_{n\geqslant 0} A_n\Big) = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} (B \cap A_n)$.

Pour chaque entier n, l'ensemble $B \cap A_n$ est élément de $\mathcal{P}$ (définition de $\mathcal{P}_m$.)

De plus la suite des $B_n = B \cap A_n$ est croissante pour l'inclusion.

En effet, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a l'implication $A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow B_n \subset B_{n+1}$.

On en déduit que $\bigcup\limits_{n\geqslant 0}(B\cap A_n)$ est élément de $\mathcal{P}$ (car $\mathcal{P}$ est achevé.)

Ainsi $\bigcup\limits_{n\geqslant 0} A_n$ est un élément de $\mathcal{P}_m$.

On procèderait de même avec des intersections de suites décroissantes pour l'inclusion.

Conclusion : si le pavage $\mathcal{P}$ est achevé, il en est de même du pavage $\mathcal{P}_m$. [Q]

Deuxième Partie

1. On sait que $\emptyset$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des pavages de E.

   Que l'on note $\mathcal{P}=\emptyset$ ou $\mathcal{P}=\mathcal{P}(E)$, l'implication $(A,B)\in\mathcal{P}^2\Rightarrow A\cap\overline{B}\in\mathcal{P}$ est évidente (et dans le cas $\mathcal{P}=\emptyset$ c'est parce que l'assertion $(A,B)\in\mathcal{P}^2$ est fausse...)

   Conclusion : $\emptyset$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des clans de E. [Q]

2. Dans la question 2 de la première partie, on a trouvé les pavages de E.

   Il suffit donc d'éliminer les pavages qui ne sont pas des clans.
   - Si $E=\emptyset$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset\}$.

     Les clans de E sont $\mathcal{P}=\emptyset$ et $\mathcal{P}=\mathcal{P}(E)$.
   - Si $E=\{a\}$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{a\}\}$.

     Les clans de E sont $\mathcal{P}=\emptyset$, $\mathcal{P}=\{\emptyset\}$, et $\mathcal{P}=\mathcal{P}(E)$.
   - Si $E=\{a,b\}$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. Les clans E sont :

     $$\begin{array}{lll}\mathcal{P}=\emptyset & \mathcal{P}=\{\emptyset\} & \mathcal{P}=\{\emptyset,\{a\}\}\\ \mathcal{P}=\{\emptyset,\{b\}\} & \mathcal{P}=\{\emptyset,\{a,b\}\} & \mathcal{P}=\mathcal{P}(E)\end{array}$$

   [Q]

3. Soit $\mathcal{P}$ un clan de E. On sait déjà que $\mathcal{P}_m$ est un pavage.

   Il reste à prouver l'implication : $(X,Y)\in\mathcal{P}_m\Rightarrow X\cap\overline{Y}\in\mathcal{P}_m$.

   On se donne donc deux éléments quelconques de X et Y de $\mathcal{P}_m$.

   Soit A un élément de $\mathcal{P}$. Il faut prouver que $(X\cap\overline{Y})\cap A$ appartient à $\mathcal{P}$.

   Or $(X\cap\overline{Y})\cap A=\overline{Y}\cap B$, où $B=X\cap A$ est un élément de $\mathcal{P}$.

   D'autre part $B\cap\overline{Y}=B\cap(\overline{Y}\cup\overline{B})=B\cap(\overline{Y\cap B})$.

   L'ensemble $Y\cap B$ est dans $\mathcal{P}$ car Y est dans $\mathcal{P}_m$ et B est dans $\mathcal{P}$.

   Puisque $\mathcal{P}$ est un clan, l'intersection $B\cap(\overline{Y\cap B})$ est un élément de $\mathcal{P}$.

   Ainsi $X\cap\overline{Y}$ est dans $\mathcal{P}_m$. On en déduit que $\mathcal{P}_m$ est un clan. [Q]

4. (a) On commence par prouver que $\mathcal{E}_A$ est un pavage de E.

   Pour cela, on se donne deux éléments X et Y de $\mathcal{E}_A$.

   Il s'agit de prouver que $X\cup Y$ et $X\cap Y$ sont encore des éléments de $\mathcal{E}_A$.
   - On a : $A\cap(\overline{X\cup Y})=A\cap\overline{X}\cap\overline{Y}=\big(A\cap\overline{X}\big)\cap\big(A\cap\overline{Y}\big)$.

     Par définition de $\mathcal{E}_A$, les ensembles $A\cap\overline{X}$ et $A\cap\overline{Y}$ sont éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

     Il en est donc de même de leur intersection, puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage.

     On en déduit que $X\cup Y$ est un élément de $\mathcal{E}_A$.

– On a : $A\cap\overline{(X\cap Y)} = A\cap\big(\overline{X}\cup\overline{Y}\big) = \big(A\cap\overline{X}\big)\cup\big(A\cap\overline{Y}\big)$.

Comme précédemment, les ensembles $A\cap\overline{X}$ et $A\cap\overline{Y}$ sont dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

Il en est de même de leur réunion, puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage.

On en déduit que $X\cap Y$ est un élément de $\mathcal{E}_A$.

On a donc prouvé que $\mathcal{E}_A$ est un pavage de E. [Q]

(b) Il faut maintenant prouver que $\mathcal{E}_A$ est stable par passage à la réunion dans une suite croissante, et par passage à l'intersection dans une suite décroissante.

– Soit $(B_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}_A$, et $B = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} B_n$.

Il faut prouver $A\cap\overline{B}\in\widehat{\mathcal{P}}$. Or $A\cap\overline{B} = A\cap\big(\bigcap\limits_{n\geqslant 0}\overline{B_n}\big) = \bigcap\limits_{n\geqslant 0}(A\cap\overline{B_n})$.

Pour chaque entier n, l'ensemble $A\cap\overline{B_n}$ est un élément de $\widehat{\mathcal{P}}$.

D'autre part, la suite des $A_n = A\cap\overline{B_n}$ est décroissante pour l'inclusion.

Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est achevé, il en résulte que $\bigcap\limits_{n\geqslant 0}(A\cap\overline{B_n})$ est un élément de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Ainsi $B = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} B_n$ est un élément de $\mathcal{E}_A$.

– Soit $(B_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de parties de $\mathcal{E}_A$, et $B = \bigcap\limits_{n\geqslant 0} B_n$.

Il faut prouver que $A\cap\overline{B}$ est dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

Or $A\cap\overline{B} = A\cap\big(\bigcup\limits_{n\geqslant 0}\overline{B_n}\big) = \bigcup\limits_{n\geqslant 0}(A\cap\overline{B_n})$.

Les $A\cap\overline{B_n}$ forment une suite croissante d'éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est achevé, leur réunion $\bigcup\limits_{n\geqslant 0}(A\cap\overline{B_n})$ est donc dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

Ainsi $B = \bigcap\limits_{n\geqslant 0} B_n$ est un élément de $\mathcal{E}_A$.

Conclusion : le pavage $\mathcal{E}_A$ est achevé. [Q]

(c) On suppose donc que A est un élément de $\mathcal{P}$.

Puisque $\mathcal{P}$ est un clan, tout élément B de $\mathcal{P}$ vérifie $A\cap\overline{B}\in\mathcal{P}$.

Et puisque $\mathcal{P}$ est inclus dans $\widehat{\mathcal{P}}$, on a $A\cap\overline{B}\in\widehat{\mathcal{P}}$, c'est-à-dire $B\in\mathcal{E}_A$.

On en déduit que le pavage $\mathcal{P}$ est inclus dans le pavage achevé $\mathcal{E}_A$.

Or $\widehat{\mathcal{P}}$ est, au sens de l'inclusion, le plus petit des pavages achevés contenant $\mathcal{P}$.

Il en résulte l'inclusion $\widehat{\mathcal{P}}\subset\mathcal{E}_A$. [Q]

(d) Il s'agit d'une question analogue aux questions (a) et (b).

– Soient X, Y dans $\mathcal{F}_B$. Montrons que $X\cup Y$ et $X\cap Y$ sont dans $\mathcal{F}_B$.

On a : $(X\cup Y)\cap\overline{B} = (X\cap\overline{B})\cup(Y\cap\overline{B})$ et $(X\cap Y)\cap\overline{B} = (X\cap\overline{B})\cap(Y\cap\overline{B})$.

Par définition de $\mathcal{F}_B$, les ensembles $(X\cap\overline{B})$ et $(Y\cap\overline{B})$ sont dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

Il en est donc de même de leur réunion et de leur intersection, car $\mathcal{P}$ est un pavage.

Ainsi $X \cup Y$ et $X \cap Y$ sont dans $\mathcal{F}_B$: celui-ci est donc un pavage de E.

– Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de parties de $\mathcal{F}_B$, et $A = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} A_n$.

  Il faut prouver A est dans $\mathcal{F}_B$, c'est-à-dire que $A \cap \overline{B}$ est dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

  Or $A \cap \overline{B} = \big(\bigcup\limits_{n\geqslant 0} A_n\big) \cap \overline{B} = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} \big(A_n \cap \overline{B}\big)$.

  Les $A_n \cap \overline{B}$ forment une suite croissante d'éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

  Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est achevé, leur union est dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

  Ainsi A est un élément de $\mathcal{F}_B$.

– Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de parties de $\mathcal{F}_B$, et $A = \bigcap\limits_{n\geqslant 0} A_n$.

  Il faut prouver A est dans $\mathcal{F}_B$, c'est-à-dire que $A \cap \overline{B}$ est dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

  Or $A \cap \overline{B} = \big(\bigcap\limits_{n\geqslant 0} A_n\big) \cap \overline{B} = \bigcap\limits_{n\geqslant 0} \big(A_n \cap \overline{B}\big)$.

  Les $A_n \cap \overline{B}$ forment une suite décroissante d'éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

  Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est achevé, leur intersection est dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

  Ainsi A est un élément de $\mathcal{F}_B$.

– Conclusion : $\mathcal{F}_B$ est un pavage achevé de E.

[Q]

(e) On suppose donc que B est un élément de $\widehat{\mathcal{P}}$. Montrons l'inclusion $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}_B$.

Pour cela, on se donne un élément quelconque A de $\mathcal{P}$.

On sait d'après la question (b) que $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans $\mathcal{E}_A$.

Autrement dit, l'élément B de $\widehat{\mathcal{P}}$ vérifie $A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}$.

Un autre façon d'interpréter cette égalité est de dire que A est dans $\mathcal{F}_B$.

Ainsi $\mathcal{P}$ est inclus dans le pavage achevé $\mathcal{F}_B$.

Mais $\widehat{\mathcal{P}}$ est le plus petit, pour l'inclusion, des pavages achevés contenant $\mathcal{P}$.

Il en résulte l'inclusion $\widehat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{F}_B$. [Q]

(f) On se donne deux éléments A et B de $\widehat{\mathcal{P}}$.

On sait que $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans le pavage achevé $\mathcal{F}_B$. Donc $A \in \mathcal{F}_B$.

On en déduit que $A \cap \overline{B}$ est dans $\widehat{\mathcal{P}}$, ce qui prouve que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un clan. [Q]