Corrigé

Sous-groupes additifs de $(\mathbb{R},+)$

1. Le sous-groupe G n'est pas discret si et seulement si
$$\forall\alpha>0,\ G\cap]0,\alpha[\neq\emptyset$$
Supposons que G ne soit pas discret. Considérons un réel x quelconque et un $\alpha>0$. Il existe un élément $g\in G\cap]0,\alpha[$. Appelons n la partie entière de $\frac{x}{g}$. On a alors
$$ng\leq x<ng+g\qquad ng+g<ng+\alpha\leq x+\alpha$$
donc $(n+1)g\in G\cap\,]x,x+\alpha[$ car G est stable.

2. a. Si x et y sont dans I (intervalle de longueur $\frac{\alpha}{2}$), alors :
$$|x-y|\leq\frac{\alpha}{2}<\alpha$$
En particulier, si x et y sont deux éléments distincts de $G\cap I$, un des deux réels $x-y$ ou $y-x$ est un élément de $G\cap]0,\alpha[$ ce qui est impossible.
Un intervalle quelconque de longueur finie est toujours inclus dans l'union d'un nombre fini d'intervalles de longueur $\frac{\alpha}{2}$. Chacun de ces (petits) intervalles ne peut contenir qu'au plus un élément de G. Par conséquent, l'intersection de G avec un tel intervalle (borné quelconque) est vide ou finie.

   b. Comme G n'est pas réduit à 0, il existe un g non nul dans G. Comme $-g\in G$ on peut supposer $g>0$. Considérons alors l'ensemble $G\cap\,]0,g]$.
Il est non vide (il contient g) et fini d'après la question précédente. Il admet donc un plus petit élément que l'on note m.
Montrons que $m=\min G\cap\mathbb{R}_+^*$.
On sait déjà que
$$m\in G\cap\,]0,g]\subset\mathbb{R}_+^*$$
D'autre part, si $k\in G\cap\mathbb{R}_+^*$ deux cas sont possibles
   - $k\leq g$ alors $k\in G\cap]0,g]$ donc $m\leq h$
   - $g<k$ alors $m<h$ car $m\leq g$.

   Ceci montre bien que m est un minorant de $G\cap]0,g]$ donc le plus petit élément de cet ensemble.

   c. D'après la définition d'un sous-groupe (stabilité) $\mathbb{Z}m\subset G$.
Réciproquement, soit $g\in G\cap\mathbb{R}_+^*$. Notons k la partie entière de $\frac{g}{m}$. On a alors
$$k\leq\frac{g}{m}<k+1\Rightarrow km\leq g<(k+1)m\Rightarrow 0\leq g-km<m$$
À cause des propriétés de stabilité de G, on a $-km\in G$ et $g-km\in G\cap[0,m[$.
D'après la définition de m, il est impossible que $g-km\in G\cap\mathbb{R}_+^*$. Ceci entraîne $g-km=0$. C'est à dire $g=km$ donc $g\in\mathbb{Z}m$.

3. a. Vérification facile des propriétés de stabilité.

   b. Si S est discret, d'après la question 2., il existe $m>0$ tel que $S=\mathbb{Z}m$.
Comme $x=1\times x+0\times y\in S$, il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $x=pm$. De même, $y=0\times 1+1\times y\in S$ il existe donc $q\in\mathbb{Z}^*$ tel que $y=qm$. On en déduit
$$m=\frac{x}{p}=\frac{y}{q}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$$
Réciproquement, si on suppose $\frac{x}{y}\in\mathbb{Q}$,
$$\exists(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*\text{ tq }\frac{x}{y}=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\frac{x}{p}=\frac{y}{q}\ \text{(désigné par }m)$$
Alors $x=pm$ et $y=qm$ donc x et y sont dans $\mathbb{Z}m$ et
$$\left(\forall(i,j)\in\mathbb{Z}^2,\ ix+jy=(ip+jq)m\in\mathbb{Z}m\right)\Rightarrow S\subset\mathbb{Z}m.$$
Ceci entraîne que $S\cap]0,m[$ est vide donc que S est discret.

4. a. Si $A\cap B$ était non vide, il existerait des entiers non nuls p et q tels que $px=qy$.
On aurait alors
$$\frac{x}{y}=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$$

   b. D'après 3., S est un sous-groupe qui n'est pas discret. Pour tout $\alpha>0$, il existe donc des entiers m et n tels que $mx+ny\in]0,\alpha[$.
Lorsque $\alpha<\min(x,y)$, les entiers m et n sont tous les deux non nuls. Posons $a=mx$, $b=-ny$, alors $a\in A$ et $b\in B$ donc
$$\forall\alpha<\min(x,y),\ \inf\{|a-b|,(a,b)\in A\times B\}\leq\alpha$$
On en déduit que cette borne inférieure est nulle.

5. Considérons un intervalle quelconque $[u,v]$ dans $[-1,1]$, on doit montrer qu'il existe un entier n tel que $\cos n\in[u,v]$.
Posons $\alpha=\arccos v$, $\beta=\arccos u$ et formons l'intervalle $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$.
Comme 2π est irrationnel, le sous-groupe additif $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ engendré par 1 et 2π est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc des entiers m et n tels que $m+2\pi n\in[\alpha,\beta]$. On en déduit que $\cos m\in[u,v]$ ce qu'il fallait montrer.