Mercredi 03 Octobre 2018

Simulation DS 1

Logie-Recurrence-Sommes

Durée : 1 heure

Documents & Calculatrices interdits

Exercice 1 : (Niveau 1)

Donner les négations des propositions suivantes :

1. $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant y$ ou $f(x) \geqslant y$.
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}, |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, x < y < z \Rightarrow (f(x) < f(y)$ et $f(y) > f(z))$.

Exercice 2 : (Niveau 1)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{8}{5}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 6u_n - 3$.
Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 6^n + \frac{3}{5}$.

Exercice 2 : (Niveau 3)

Démontrer les propositions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; 2!\,4!\ldots(2n)! \geq ((n+1)!)^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Exercice 4 : (Niveau 3)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n}{k} (-1)^{k-1}.$$

On se propose de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right] (-1)^{k-1}.$$

2) En déduire une expression simplifiée de $S_{n+1} - S_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que, pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k}.$$

4) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}.$$

5) Conclure, sans utiliser de raisonnement par récurrence.

Exercice 5 (Facultatif, Niveau 4)

Pour $m \leq n$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Big/ \binom{n}{k} = \frac{n+1}{n+1-m}.$