Corrigé

Exercice 1 :

1. Pour chacune des assertions, écrire sa négation puis préciser si l'assertion est vraie en justifiant.

   (a) P : $\forall x \in]-1,1[, \exists y \in]-1,1[, y < x$.
   non P : $\exists x \in]-1,1[, \forall y \in]-1,1[, y \geqslant x$.
   P est vraie. En effet, soit $x \in]-1,1[$. On pose $y = \frac{-1+x}{2} \in]-1,1[$, c'est la moyenne de -1 et x. On a $y < x$.

   (b) P : $\forall x \in [0,+\infty[, x^2 \geqslant x \geqslant 0$.
   non P : $\exists x \in [0,+\infty[, x^2 < x \quad \text{ou} \quad x < 0$.
   P est fausse car si P était vraie pour $x = \frac{1}{2}$, on aurait $x^2 \geqslant x$, donc $\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est faux.

   (c) P : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad [(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \implies (x = 0)]$.
   non P : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad [(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \quad \text{et} \quad (x \neq 0)]$.
   Montrons que P est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$. Supposons par l'absurde que $x \neq 0$. Alors en prenant $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$, on a $|x| < \frac{|x|}{2}$ et donc $1 < \frac{1}{2}$. Contradiction.

Exercice 2 (Une somme classique par récurrence) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

C'est vrai pour $n = 1$ puisque $\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = -1$ et $(-1)^1 \frac{1(1+1)}{2} = -1$.

Supposons que c'est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= \frac{(-1)^n (n+1)}{2}(n - 2(n+1)) = \frac{(-1)^n(n+1)}{2}(-n-2) = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que c'est vrai pour $n+1$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{4i+1}} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\times\frac{1}{(2^4)^i}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{16})^i\\ &= \frac{1}{2}\frac{1/16-(1/16)^{n+1}}{1-1/16}\\ &= \boxed{\frac{1}{30}\left(1-(1/16)^n\right)}\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}3^k &= \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-3)^{i-1}=\frac{1}{-3}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-3)^i\\ &= \frac{1}{-3}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-3)^i-1\right)=\frac{1}{-3}\left((1-3)^n-1\right)\\ &= \boxed{\frac{1-(-2)^n}{3}}\end{aligned}$$

3. Ici, il y a un découpage plus pratique que l'autre. On a

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i^2}{j(j+1)} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i^2}{j(j+1)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)}\sum_{i=1}^{j}i^2=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}\\ &= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}(2j+1)=\frac{1}{6}\left(2\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{j=1}^{n}1\right)=\frac{1}{6}\left(2\frac{n(n+1)}{2}+n\right)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i^2}{j(j+1)}=\frac{n(n+2)}{6}}.$$

Exercice 4 :

1. Simplifier la somme
$$\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\binom{2n}{k}-(-1)^{k-1}\binom{2n}{k-1}\right).$$

   C'est une somme télescopique de la forme $\sum_{k=1}^{n}(u_k-u_{k-1})$. Elle vaut u_n-u_0, donc
$$(-1)^n\binom{2n}{n}-(-1)^0\binom{2n}{0}=(-1)^n\binom{2n}{n}-1.$$

2. En déduire la valeur de la somme
$$S=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{k}.$$

   En utilisant la formule du triangle de Pascal,
$$\begin{aligned}
S &= (-1)^0\binom{2n+1}{0}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{k}\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\binom{2n}{k}+\binom{2n}{k-1}\right)\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{2n}{k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{2n}{k-1}\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{2n}{k}-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{2n}{k-1}\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\binom{2n}{k}-(-1)^{k-1}\binom{2n}{k-1}\right)\\
&= 1+(-1)^n\binom{2n}{n}-1=(-1)^n\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

Exercice 5 :

1. Démontrer à l'aide de la formule du binôme de Newton que $4^n \geqslant \binom{2n}{n}$.
   On a
$$4^n = 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \underbrace{\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{2n} \binom{2n}{k}}_{\geqslant 0} + \binom{2n}{n} \geqslant \binom{2n}{n}.$$

2. Un résultat de croissance
   (a) Démontrer que pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a :
$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$
   On a
$$\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{n-k+1}{k}\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
   car $k(k-1)! = k!$ et $\frac{n-k+1}{(n-k+1)!} = \frac{1}{(n-k)!}$.
   (b) En déduire que pour tout entier k compris entre 1 et $\frac{n}{2}$, on a :
$$\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1}.$$
   On a $k \leq \frac{n}{2}$, donc $n \geqslant 2k$. Ainsi $n-k+1 \geqslant 2k-k+1 = k+1$ et donc
$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} \geqslant \frac{k+1}{k}\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k-1}.$$
   Comparer de même sans justifier, les nombres $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{k+1}$ pour k entier compris entre $\frac{n}{2}$ et $n-1$.
   On a $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$.

3. Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$, comparer $\binom{2n}{k}$ et $\binom{2n}{n}$, en déduire que $\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n+1}$.
   On déduit des questions précédentes que pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, le plus grand coefficient binomial est celui du «milieu», c'est $\binom{2n}{n}$.
   On a donc
$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \leqslant \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n}.$$
   Car chaque terme de la somme ci-dessus est inférieur à $\binom{2n}{n}$, et parce qu'il y a $2n+1$ termes.
   On en déduit bien que
$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1}.$$

Nous venons donc de montrer l'encadrement suivant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{4^n}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 4^n.$$

Exercice 5 :

1. Démontrer à l'aide de la formule du binôme de Newton que $4^n \geqslant \binom{2n}{n}$.
   On a
   $$4^n = 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \underbrace{\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{2n} \binom{2n}{k}}_{\geqslant 0} + \binom{2n}{n} \geqslant \binom{2n}{n}.$$

2. Un résultat de croissance
   (a) Démontrer que pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a :
   $$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$
   On a
   $$\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{n-k+1}{k}\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
   car $k(k-1)! = k!$ et $\frac{n-k+1}{(n-k+1)!} = \frac{1}{(n-k)!}$.
   (b) En déduire que pour tout entier k compris entre 1 et $\frac{n}{2}$, on a :
   $$\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1}.$$
   On a $k \leq \frac{n}{2}$, donc $n \geqslant 2k$. Ainsi $n-k+1 \geqslant 2k-k+1 = k+1$ et donc
   $$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} \geqslant \frac{k+1}{k}\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k-1}.$$
   Comparer de même sans justifier, les nombres $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{k+1}$ pour k entier compris entre $\frac{n}{2}$ et $n-1$.
   On a $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$.

3. Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$, comparer $\binom{2n}{k}$ et $\binom{2n}{n}$, en déduire que $\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n+1}$.
   On déduit des questions précédentes que pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, le plus grand coefficient binomial est celui du «milieu», c'est $\binom{2n}{n}$.
   On a donc
   $$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} \leqslant \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n}.$$
   Car chaque terme de la somme ci-dessus est inférieur à $\binom{2n}{n}$, et parce qu'il y a $2n+1$ termes.
   On en déduit bien que
   $$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1}.$$

Nous venons donc de montrer l'encadrement suivant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{4^n}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 4^n.$$

Exercice 6 :

2. Démontrer l'inégalité pour $n = 2$. On a $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \geqslant 0$, car un carré est positif ou nul. On en déduit donc que $x_1 + x_2 \geqslant 2\sqrt{x_1 x_2}$, d'où le résultat en divisant par 2.

3. Cas général : on note m la moyenne arithmétique de $x_1, \ldots, x_n$.

4. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right)$, puis conclure. On a

$$S = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right) = \left(\frac{x_1}{m} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{x_n}{m} - 1\right) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} x_k - n = \frac{1}{m} \times n \times m - m = 0$$

D'après l'inégalité de l'indication, on a pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{x_k}{m} - 1 \geqslant \ln \frac{x_k}{m}$, d'où en sommant on a

$$\begin{aligned} S = \left(\frac{x_1}{m} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{x_n}{m} - 1\right) &\geqslant \ln \frac{x_1}{m} + \cdots + \ln \frac{x_n}{m} \\ &= \ln\left(\frac{x_1}{m} \times \cdots \times \frac{x_n}{m}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x_1 \times \cdots \times x_n}{m^n}\right) \end{aligned}$$

Comme $S = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} & \ln\left(\frac{x_1 \times \cdots \times x_n}{m^n}\right) \leqslant 0 \\ \Longrightarrow\ & \frac{x_1 \times \cdots \times x_n}{m^n} \leqslant 1 \\ \Longrightarrow\ & x_1 \times \cdots \times x_n \leqslant m^n \\ \Longrightarrow\ & \sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n} \leqslant m. \end{aligned}$$

FIN