Simulation DS N°2

Complexes-Fcts. Usuelles-Eq. Diff.

Lundi 22 Octobre 2018

Durée : 1 heure

Exercice 1 : Les questions sont indépendantes.

1. Décrire et représenter l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

$$\frac{z}{z-2i} \in \mathbb{R}.$$

2. Déterminer puis représenter graphiquement les racines 4-ièmes du nombre -1.

3. Déterminer un argument de $z = -2(1 + e^{i\frac{\pi}{7}})$.

4. Soit M un point d'affixe z, $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe u et Ω un point d'affixe ω.

   (a) On note M_1 l'image du point M par la translation du vecteur $\overrightarrow{u}$. On note M_2 l'image de M_1 par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. Donner l'affixe du point M_2 en fonction de z.

   (b) On note M_3 l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ, puis M_4 l'image de M_3 par l'homothétie de centre Ω et de rapport 2. Donner l'affixe de M_4.

5. Démontrer par double inclusion, l'égalité d'ensembles suivante :

$$\{e^{ir\pi} \mid r \in \mathbb{Q}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ z^n = 1\}.$$

Exercice 1 :

1) Résoudre sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ $x(xy' + y - x) = 1,\ I =]-\infty, 0[$

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ $y'' + 6y' + 9y = e^{2x}$

3) Donner la primitive, qui s'annule en 0 de : $\sqrt{1-x^2}$

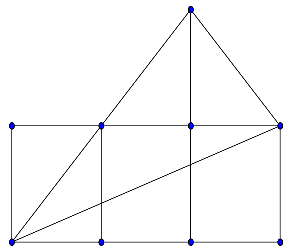
Problème : Les formules « à la John Machin »

Le problème est consacré à quelques-unes des (très) nombreuses formules qui expriment π (ou plutôt $\pi/4$) sous la forme d'une combinaison linéaire à coefficients entiers d'arc-tangentes d'inverses d'entiers.

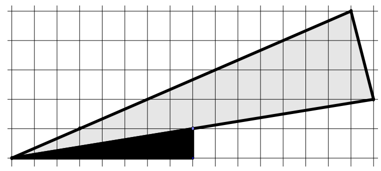
La plus célèbre est : $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$ (John Machin, 1706, avec laquelle il calcula 100 décimales de π).

Pour cette raison, les formules : $\dfrac{\pi}{4} = a_1\arctan\dfrac{1}{b_1} + a_2\arctan\dfrac{1}{b_2} + \cdots + a_p\arctan\dfrac{1}{b_p}$, où les a_k et les b_k sont des entiers (les $b_k \geqslant 2$), sont souvent appelées formules "à la Machin".

Première partie : Machin et Fibonacci



1. Les questions (1a) et (1b) doivent être traitées uniquement par la géométrie.
   (a) Observer la figure ci-contre et en déduire : $\dfrac{\pi}{4} = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3}$.



   (b) Avec la figure ci-contre, établir : $\arctan\dfrac{1}{3} = \arctan\dfrac{1}{5} + \arctan\dfrac{1}{8}$:

   En déduire une nouvelle formule "à la Machin".

2. On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 2$: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

   On pose également, pour tout $n \geqslant 1$: $G_n = \arctan\dfrac{1}{F_n}$.

   (a) Prouver l'égalité $F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

   (b) En déduire l'égalité $G_{2n} = G_{2n+1} + G_{2n+2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

   Écrire les égalités qui en résultent pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

   (c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, en déduire les formules "à la Machin" : $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \arctan\frac{1}{F_{2k+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2n}}$

   Expliciter la formule si $n = 4$. Qu'obtient-on quand $n \to +\infty$?

Leonardo Fibonacci (1175-1250), italien.

Fin

John Machin (1680-1751), anglais.