

Devoir Surveillé N°2

Complexes-Fcts. Usuelles-Eq. Diff.

Mercredi 24 Octobre 2018

Durée : 3 heures

Documents et Calculatrices Non Autorisés



Blague du jour

Bientôt vous serez ingénieur, peut être informaticien. Vérifier sur la liste ci dessous si vous avez le profil :


- **Ingénieur DISQUE DUR** : il se rappelle tout, POUR TOUJOURS.
- **Ingénieur RAM** : il oublie tout de vous, dès le moment où vous lui tournez le dos.
- **Ingénieur CD-ROM** : il va toujours plus vite avec le temps.
- **Ingénieur WINDOWS** : Tout le monde sait qu'il ne peut pas faire une chose correctement, mais personne ne peut s'en passer de ses services.
- **Ingénieur ECONOMISEUR D'ECRAN** : Il est bon à rien, mais au moins, il est marrant !



Question de Cours

- 1 Compléter les formules : $1 + e^{i\theta} = \dots$ et $1 - e^{i\theta} = \dots$;
- 2 Compléter les formules : $e^{ia} + e^{ib} = \dots$ et $e^{ia} - e^{ib} = \dots$;
- 3 Compléter les formules : $\cos a + \cos b = \dots$ et $\sin a + \sin b = \dots$;
- 4 Compléter les formules : $\cos a \cdot \cos b = \dots$ et $\cos a \cdot \sin b = \dots$;
- 5 Compléter les formules : $\widehat{AB, CD}$ et $\cos a \cdot \sin b = \dots$;
- 6 Rappeler les formules de Moivre et d'Euler ;
- 7 Rappeler la définition de translation, ainsi que son écriture complexe ;
- 8 Rappeler la définition de homothétie, ainsi que son écriture complexe ;
- 9 Rappeler la définition de rotation, ainsi que son écriture complexe ;
- 10 Rappeler la définition de similitude directe, ainsi que son écriture complexe ;



 Exercice Application de Cours

1. Résoudre dans \mathbf{C} $z^2 - (2 + 3i)z + 3i - 1 = 0$.
2. Simplifiez $z_2 = \left((\sqrt{3} - 1) + i(1 + \sqrt{3}) \right)^n + \left((\sqrt{3} - 1) - i(1 + \sqrt{3}) \right)^n$.
3. Résoudre dans \mathbf{C} $(z + i)^n = (z - i)^n$
4. Linéarisez $\cos^2(x) \sin^2(x)$, et $\cos^5(x) \sin(x)$.
5. Exprimez $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
6.
 - 1) Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$.
 - 2) En déduire la valeur de $u_n = 2^0 \operatorname{th}(2^0 x) + 2^1 \operatorname{th}(2^1 x) + \dots + 2^{n-1} \operatorname{th}(2^{n-1} x)$
pour n entier naturel non nul et x réel non nul donnés puis calculer la limite de la suite (u_n) .
7. Simplifier l'expression $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2x^2} - \operatorname{Arctan} \frac{x}{x+1} + \operatorname{Arctan} \frac{x-1}{x}$.
8. Résoudre sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$ l'équation $y' - \tan(t)y = \frac{1}{1 + \cos(t)}$.
9. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sin(x)$.
10. Donner une primitive, sur le domaine de définition, de $\frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$

 Exercice Facultatif (Oral Mines MP 05)

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$. Montrer que $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.

Problème 1 : Nombres Complexes

Problème – Minimum d'une somme de distances

I.1 Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$. Montrer que z et z' ont mêmes arguments si et seulement si $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$.

I.2

a Montrer que pour tous nombres complexes z et z' , $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, et que cette inégalité est une égalité si et seulement si $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$.

b Soit $n \geq 2$ un entier, z_1, \dots, z_n des nombres complexes. Montrer :

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|.$$

c Montrer que l'inégalité ci-dessus est une égalité si et seulement si pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\bar{z}_i z_j \in \mathbb{R}_+$.

I.3 Soit $n \geq 2$ un entier, z_1, \dots, z_n des nombres complexes tous non nuls.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $a_k = \frac{z_k}{|z_k|}$, et on suppose que $a_1 + \dots + a_n = 0$.

a Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$S(z) = \bar{a}_1(z_1 - z) + \dots + \bar{a}_n(z_n - z).$$

Montrer que $S(z)$ est un nombre réel positif indépendant de z , que l'on précisera en fonction de z_1, \dots, z_n .

b En déduire que, pour tout nombre complexe z :

$$(\star) : |z_1| + \dots + |z_n| \leq |z - z_1| + \dots + |z - z_n|.$$

c Montrer de plus que cette inégalité est une égalité si et seulement si :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \bar{a}_k(z_k - z) \in \mathbb{R}_+.$$

I.4 Dans le plan complexe, on note M_1, \dots, M_n les points d'affixes z_1, \dots, z_n , et N un point d'affixe z . On suppose toujours que $a_1 + \dots + a_n = 0$. On note O le point d'affixe nulle.

a Interpréter géométriquement les résultats de la question I.3. On pourra faire intervenir la fonction $f : N \mapsto NM_1 + \dots + NM_n$.

b Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des points où la fonction f atteint son minimum. On distinguera suivant que les points M_1, \dots, M_n sont alignés ou non.

I.5 Dans cette question, on choisit, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z_k = e^{2ik\pi/n}$.

a Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$n \leq |z_1 - z| + \dots + |z_n - z|.$$

b En choisissant une bonne valeur de z , en déduire l'encadrement :

$$\frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq n.$$

c En déduire :

$$\frac{1}{n} \leq \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \frac{2}{n}.$$

 Problème 2 : Fonctions Usuelles

II. Argument sinus hyperbolique.

L'objectif de ce problème est de définir puis étudier la fonction réciproque du sinus hyperbolique : l'*argument sinus hyperbolique*, puis d'établir dessus une relation fonctionnelle.

- 1) Rappeler (sans démonstration) la définition, le tableau de variations et l'expression de la dérivée de la fonction sinus hyperbolique.
- 2) Montrer que, pour tout réel x , il existe un unique réel t vérifiant $\text{sh}(t) = x$.

Dans ce cas, on notera dorénavant $t = \text{Argsh}(x)$ (argument sinus hyperbolique de x).

- 3) Établir le tableau de variations de la fonction Argsh .
- 4) Montrer que la fonction Argsh est dérivable et que pour tout réel x :

$$\text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

- 5) Montrer que, pour tout réel x ,

$$\text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Indication : on pourra utiliser simultanément les deux formules de trigonométrie hyperbolique au programme reliant sh et ch .

On souhaite désormais prouver de trois manières différentes que, pour tout réel x ,

$$\text{Argsh}(2x\sqrt{1+x^2}) = 2 \text{Argsh}(x).$$

- 6) Première méthode : par la trigonométrie hyperbolique.
 - a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\text{sh}(2t) = 2 \text{sh}(t) \text{ch}(t)$.
 - b) Conclure quant à l'identité demandée.
- 7) Deuxième méthode : par une étude analytique.
On considère la fonction $f : x \mapsto \text{Argsh}(2x\sqrt{1+x^2})$.
 - a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f . On notera \mathcal{D} ce dernier domaine.
 - b) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à \mathcal{D} .
 - c) Conclure quant à l'identité demandée.
- 8) Troisième méthode : par la formule logarithmique de Argsh .
Conclure quant à l'identité demandée en utilisant directement l'identité obtenue à la question 5).

