

Devoir Surveillé N°2

Complexes-Fcts. Usuelles-Eq. Diff.

Mercredi 24 Octobre 2018

Durée : 3 heures

Corrigé

Exercice Application de Cours

- 1) $z^2 - (2 + 3i)z + 3i - 1 = 0$
- Le discriminant est $\Delta = -1$.
 - les solutions de (E_1) sont $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 1 + i$.
2. On remarque que $(\sqrt{3} - 1) + i(1 + \sqrt{3})$ et $(\sqrt{3} - 1) - i(1 + \sqrt{3})$ sont conjugués. Par les propriétés de la conjugaison, il en résulte que leurs puissances $n^{\text{ième}}$ sont aussi conjuguées. Ainsi,

$$\begin{aligned} z_2 &= \left((\sqrt{3} - 1) + i(1 + \sqrt{3}) \right)^n + \left((\sqrt{3} - 1) - i(1 + \sqrt{3}) \right)^n \\ &= 2\Re \left[\left((\sqrt{3} - 1) + i(1 + \sqrt{3}) \right)^n \right] \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - 1) + i(1 + \sqrt{3}) &= \sqrt{3} + i - 1 + i\sqrt{3} = 2(e^{i\pi/6} + e^{i\pi/3}) \\ &= 4 \cos(-\pi/4) e^{i5\pi/12} = 2\sqrt{2} e^{i5\pi/12} \end{aligned}$$

D'après les formules de Moivre, il s'ensuit que

$$z_2 = 2\Re \left[(2\sqrt{2})^n e^{i5n\pi/12} \right] = 2(2\sqrt{2})^n \cos \frac{5n\pi}{12}$$

- 3) Notons (E_2) l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.
Soit $z \in \mathbf{C}$

$$\begin{aligned} (E_2) &\iff \left\{ \begin{array}{l} z \neq i \\ \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z \neq i \\ \frac{z+i}{z-i} = w \\ w^n = 1 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} z \neq i \\ \frac{z+i}{z-i} = w \\ \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket; w = e^{2ik\pi/n} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z \neq i \\ z(1-w) = -i(1+w) \\ \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket; w = e^{2ik\pi/n} \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} z \neq i \\ \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket; w = e^{2ik\pi/n} \\ z = -i \frac{1+w}{1-w} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, z est solution de (E_2) si et seulement si $z \neq i$ et il existe $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que

$$z = -i \frac{1 + e^{2ik\pi/n}}{1 - e^{2ik\pi/n}} = \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} = \cotan(k\pi/n)$$

Visiblement, ces $n-1$ nombres réels sont tous différents de i , et par conséquent,

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}; k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \right\}$$

- 4) Linéarisons $\cos^2 x \sin^2 x$ à l'aide de formules de trigo circulaire :

$$\begin{aligned} \cos^2 x \sin^2 x &= \frac{\sin^2(2x)}{4} = \frac{1}{4} \frac{1 - \cos(4x)}{2} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos(4x) \end{aligned}$$

- 5) Linéarisons $\cos^5 x \sin x$, à l'aide des formules d'Euler, Moivre et Newton :

$$\begin{aligned} \cos^5 x \sin x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^5 \times \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{64i} (e^{ix} + e^{-ix})^4 \times (e^{2ix} - e^{-2ix}) \\ &= \frac{1}{64i} [e^{4ix} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}] \times [e^{2ix} - e^{-2ix}] \\ &= \frac{1}{64i} [e^{6ix} + 4e^{4ix} + 5e^{i2x} + 0 - 5e^{-2ix} - 4e^{-4ix} - e^{-6ix}] \\ &= \frac{1}{32} [\sin(6x) + 4\sin(4x) + 5\sin(2x)] \end{aligned}$$

6)

On a vu dans l'exercice n° 1 que pour tout réel x , $\text{th}(2x) = \frac{2 \text{th } x}{1 + \text{th}^2 x}$ ce qui s'écrit pour x non nul : $\frac{1 + \text{th}^2 x}{\text{th } x} = \frac{2}{\text{th}(2x)}$

ou encore $\text{th } x + \frac{1}{\text{th } x} = \frac{2}{\text{th}(2x)}$ ou finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{th } x = \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th } x}.$$

Soit n un entier naturel non nul et x un réel non nul. D'après ce qui précède,

$$u_n = \sum_{k=0}^n 2^k \text{th}(2^k x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{2^{k+1}}{\text{th}(2^{k+1} x)} - \frac{2^k}{\text{th}(2^k x)} \right) = \frac{2^{n+1}}{\text{th}(2^{n+1} x)} - \frac{1}{\text{th } x} \text{ (somme télescopique).}$$

Ensuite, pour $x > 0$, $\text{th}(2^{n+1} x)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x > 0$ et vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x < 0$.

7) f_4 est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ et pour x élément de \mathcal{D} , on a :

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= -\frac{1}{x^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{4x^4}} - \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{x - (x-1)}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{(x-1)^2}{x^2}} \\ &= -\frac{4x}{4x^4 + 1} - \frac{1}{2x^2 + 1 + 2x} + \frac{1}{2x^2 + 1 - 2x} = -\frac{4x}{4x^4 + 1} + \frac{4x}{(2x^2 + 1)^2 - 4x^2} = 0. \end{aligned}$$

f_4 est donc constante sur chacun des trois intervalles $]-\infty, -1[$, $] -1, 0[$ et $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = 0$. Pour

$$-1 < x < 0, f(x) = \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} f(t) = \text{Arctan} \frac{1}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \text{Arctan} 2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$\text{Pour } x < -1, f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}, f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\\ \pi & \text{si } x \in]-1, 0[\end{cases}.$$

8) Appliquons la méthode la variation de la constante sur I. Puisque

$$-\int -\tan(x) dx = -\ln(\cos(x)),$$

les solutions de (\mathbf{E}_H) sont les fonctions de la forme $t \mapsto \frac{\lambda}{\cos(t)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (\mathbf{E}) sont de la forme $t \mapsto \frac{\lambda(t)}{\cos(t)}$ avec $\lambda : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall t \in I, \frac{\lambda'(t)}{\cos(t)} = \frac{1}{1 + \cos(t)}, \text{ c'est-à-dire } \lambda'(t) = \frac{\cos(t)}{1 + \cos(t)} = 1 - \frac{1}{2\cos^2(t/2)}.$$

Les solutions de (\mathbf{E}) sur $] -\pi/2, \pi/2[$ sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{t - \tan(t/2) + \lambda}{\cos(t)} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

9) Passons sur \mathbb{C} et recherchons une solution particulière de l'équation $y'' + 4y' + 5y = e^{(-2+i)x}$. Puisque les solutions de l'équation caractéristique sont $-2 \pm i$, il existe une solution particulière de la forme

$$f : x \mapsto axe^{(-2+i)x}.$$

On a, pour tout nombre réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((-2+i)ax + a)e^{(-2+i)x} \\ &= ((-2+i)^2ax + 2(-2+i)a)e^{(-2+i)x} \end{aligned}$$

et $f''(x) + 4f'(x) + 5f(x) = 2iae^{(-2+i)x}$. La fonction f est donc solution *si et seulement si* $a = 1/2i = -i/2$. La partie imaginaire de cette solution particulière est une solution de l'équation initiale et vaut

$$f_0 : x \mapsto -\frac{x \cos(x)e^{-2x}}{2}.$$

La solution générale de (\mathbf{E}_H) s'écrivant

$$x \mapsto [\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)]e^{-2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

Les solutions de (\mathbf{E}) sur \mathbb{R} sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto -\frac{x \cos(x)e^{-2x}}{2} + [\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)]e^{-2x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

10) En posant $u = x - 1$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \text{Arcsin } u + C = \text{Arcsin}(x-1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

 Exercice Facultatif (Oral Mines MP 05)

Commençons par nous ramener au cas où $x = 0$, en factorisant par e^{ix} :

$$e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = e^{ix}(1 + e^{i(y-x)} + e^{i(z-x)}) = 0.$$

Quitte à remplacer y et z par $y - x$ et $z - x$ respectivement (ce qui ne changera rien à la rédaction), on peut supposer $x = 0$.

On a dès lors $1 + e^{iy} + e^{iz} = 0$. En particulier, $\sin(y) = -\sin(z)$ donc e^{iy} et e^{iz} sont soit conjugués, soit opposés. Ce dernier cas conduirait à l'absurdité $1 = 0$, donc e^{iy} et e^{iz} sont conjugués. Il vient

$$1 + e^{iy} + e^{-iy} = 0,$$

soit, en multipliant par e^{iy} :

$$1 + e^{iy} + (e^{iy})^2 = 0.$$

Par conséquent, $e^{iy} \in \{j, j^2\}$, où $j = e^{2i\pi/3}$. Quitte à considérer e^{iz} plutôt que e^{iy} , on peut supposer que $e^{iy} = j$ (et donc $e^{iz} = j^2$).

Comme $1 + (e^{iy})^2 + (e^{iz})^2 = 1 + j^2 + j^4 = 1 + j^2 + j = 0$, on a bien $1 + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$, ou, en revenant au cas général, $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.

 Problème 1 : Nombres Complexes

Problème – Minimum d'une somme de distances

I.1 Les arguments de z et de z' sont bien définis puisqu'ils sont non nuls. Notons θ et θ' des arguments respectifs de z et de z' .

Un argument de $\bar{z}z'$ est $\theta' - \theta$: $\bar{z}z'$ est un réel positif (non nul) si et seulement si $\theta' - \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, i.e. z et z' ont mêmes arguments.

I.2

a Cours.

b On montre aisément ce résultat par récurrence. C'est l'inégalité triangulaire au rang 2, et, si on le suppose vrai au rang n fixé, alors

$$|z_1 + \dots + z_{n+1}| \leq |z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|,$$

par hypothèse de récurrence et l'inégalité triangulaire.

Le résultat est donc bien établi.

c Le cas d'égalité se traite encore bien par récurrence : il est connu au rang 2, et, si on le suppose vrai à un rang n fixé, alors, en cas d'égalité au rang $n + 1$, on d'après les inégalités de la question précédente, $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$, puis, par hypothèse de récurrence, $\bar{z}_i z_j \in \mathbb{R}_+$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par symétrie des rôles joués par z_1, \dots, z_{n+1} , on a plus généralement $\bar{z}_i z_j \in \mathbb{R}_+$, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$. La réciproque est claire.

I.3

a Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} S(z) &= \bar{a}_1(z_1 - z) + \dots + \bar{a}_n(z_n - z) \\ &= \bar{a}_1 z_1 + \dots + \bar{a}_n z_n - z(\bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_n) \\ &= \frac{\bar{z}_1}{|z_1|} z_1 + \dots + \frac{\bar{z}_n}{|z_n|} z_n \\ &= |z_1| + \dots + |z_n| \end{aligned}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $S(z) = |z_1| + \dots + |z_n|$.

b D'après l'inégalité triangulaire généralisée (question I.2.b), on a :

$$\begin{aligned} |z_1| + \dots + |z_n| &= |\bar{a}_1(z_1 - z) + \dots + \bar{a}_n(z_n - z)| \\ &\leq |\bar{a}_1||z_1 - z| + \dots + |\bar{a}_n||z_n - z| \\ &= |z - z_1| + \dots + |z - z_n|. \end{aligned}$$

c À la question précédente, l'inégalité est une égalité si et seulement si l'inégalité intermédiaire dans le calcul est une égalité, c'est-à-dire, en vertu de I.2.c, $\bar{a}_1(z_1 - z), \dots, \bar{a}_n(z_n - z)$ ont mêmes arguments (ou nuls). Des nombres (non nuls) ayant mêmes arguments ont mêmes arguments que leur somme, or $\bar{a}_1(z_1 - z) + \dots + \bar{a}_n(z_n - z) = S(z) \in \mathbb{R}_+^*$ admet 0 pour argument. On a donc égalité si et seulement si :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \bar{a}_k(z_k - z) \in \mathbb{R}_+.$$

I.4

a Notons, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{ON_i}}{ON_i}$.

Les questions précédentes montrent que, dans le cas où $\vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_n = \vec{0}$, la fonction f atteint son minimum en O , et que de plus elle atteint son minimum en N si et seulement si N appartient à la demi-droite issue de M_k passant par O (c'est la condition $\bar{z}_k(z_k - z) \in \mathbb{R}_+$).

b L'ensemble cherché est donc réduit à O si les points M_1, \dots, M_n ne sont pas alignés, et c'est un segment (comprenant O) de la droite Δ comprenant ces points s'ils sont alignés.

I.5

a z_1, \dots, z_n sont les racines n -ièmes de l'unité. On a donc $a_i = z_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et $z_1 + \dots + z_n = 0$ (voir un exercice du cours). On peut donc appliquer \star , qui fournit, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$n \leq |z_1 - z| + \dots + |z_n - z|.$$

b En prenant $z = 1$, et en observant que $|z_k - 1| = 2|\sin(k\pi/n)| = 2\sin(k\pi/n)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (grâce à l'astuce de l'angle moitié et l'encadrement $0 \leq k\pi/n \leq \pi$), on obtient :

$$\frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right). \text{ L'inégalité } \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq n \text{ est quant à elle évidente (la fonction sinus est majorée par 1) :}$$

$$\boxed{\frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq n.}$$

c On a, puisque $e^{i\pi/n} \neq 1$:

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/n}\right) = \left(\frac{1 - (e^{i\pi/n})^n}{1 - e^{i\pi/n}}\right) = \frac{e^{-i\pi/2n}}{-i \sin(\pi/2n)}$$

d'où, en prenant les parties imaginaires :

$$\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cotan(\pi/2n).$$

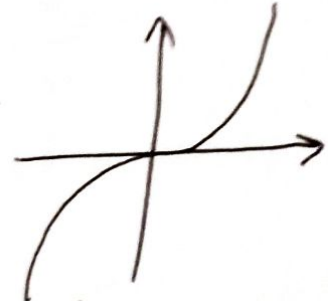
La question précédente permet d'écrire :

$$\boxed{\frac{1}{n} \leq \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \frac{2}{n}.}$$

Problème 2 : Fonctions Usuelles

II. Argument sinus hyperbolique.

1) $\operatorname{sh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh}' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$



2) $\operatorname{sh}(t) = x \Leftrightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{2} = x$

$\Leftrightarrow e^t - e^{-t} - 2x = 0$

$\Leftrightarrow X - \frac{1}{X} - 2x = 0$ où $X = e^t$

$\Leftrightarrow X^2 - 2xX - 1 = 0$ $\Delta = 4x^2 + 4$

$X = x + \sqrt{x^2 + 1}$ car $X > 0$

(l'autre est $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$)

donc $t = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

3) $t \mapsto \operatorname{sh}$ est \nearrow donc par réciproque est de même monotonie cad \nearrow

4) sh est dérivable et $(\operatorname{sh})'(t) \neq 0 \forall t$

donc argsh est dérivable

avec $(\operatorname{argsh})'(t) = (\operatorname{sh}^{-1})'(t)$

$= \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{argsh} t)}$

$= \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} t)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh} t)}}$

$\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$
 $\operatorname{ch} > 0$

$(\operatorname{argsh})'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

5) déjà fait dans la qpt 2

$$6) a) 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2 \frac{e^t - e^{-t}}{2} \times \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \dots$$

$$b) \operatorname{sh} \operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}) = 2x\sqrt{1+x^2}$$

$$\operatorname{sh}(2 \operatorname{argsh} x) = 2 \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x)$$

$$= 2\sqrt{1+x^2} \times x$$

comme sh est bij alors le résultat
 ~~$2 \operatorname{argsh} x = 2x\sqrt{1+x^2}$~~



7) a) $D_f = \mathbb{R}$ car argsh définie sur \mathbb{R}
et $1+x^2 \geq 0$

f dérivable sur \mathbb{R}
en tant que composée de f et argsh dérivable sur \mathbb{R}

$$b) f'(x) = (2x\sqrt{1+x^2})' \operatorname{argsh}'(\sqrt{1+2x})$$

$$= 2 \left(\sqrt{1+x^2} + x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) \times \frac{1}{\sqrt{1+4x^2(1+x^2)}}$$

$$= 2 \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4x^2}} = 2 \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{(1+2x^2)^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$c) f'(x) = (2 \operatorname{argsh})'(x) \Rightarrow f(x) = 2 \operatorname{argsh}(x) + \lambda$$

$\lambda = 0$ pour $x = 0$

$$8) \operatorname{Arg}(2x\sqrt{1+x^2}) = \ln \left(\sqrt{1+x^2} + 2x \sqrt{1+x^2} \right) = \ln \left(\sqrt{1+x^2} (1+2x) \right)$$

$$= \ln \left((x + \sqrt{1+x^2})^2 \right) = 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = 2 \operatorname{argsh} x$$