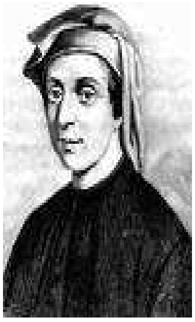
Simulation Concours Blanc

Ensembles-Réels-Suites

28 Novembre 2018

Blague du jour :

Une maman à sa jeune fille :
- Je te conseille d'épouser un archéologue.
- Ah bon ? Et pourquoi ?
- Parce que plus on vieillit, plus il vous aime.



Mathématicien du jour — **Fibonacci**

Leonardo Fibonacci (1175- 1250) est un mathématicien italien, connu en français sous l'équivalent « Léonard de Pise ». Son éducation mathématique s'est faite en grande partie en Afrique du Nord, pour des raisons commerciales. Ayant aussi voyagé en Egypte, en Syrie, il en rapporta les chiffres arabes et la notation algébrique

Exercice 1

On considère une application $f : E \mapsto E$ vérifiant $f \circ f = f$.

$\boxed{Q\ 1}$ Montrer que $\underset{(i)}{(f \text{ injective })} \Longleftrightarrow \underset{(ii)}{(f \text{ surjective })}$.

$\boxed{Q\ 2}$ Soit une partie $A \subset E$. Montrer que $f\big(f(A)\big) = f(A)$.

$\boxed{Q\ 3}$ Soit une partie $A \subset E$. Montrer que $f^{-1}\big(f^{-1}(A)\big) = f^{-1}(A)$.

Exercice 2

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et telles que $\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ x \leq y$.

1. Prouver l'existence de $\sup A$ et de $\inf B$ et montrer que $\sup A \leq \inf B$.
2. Montrer que

$$\sup A = \inf B \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ \exists y \in B \text{ tel que } |x - y| < \varepsilon.$$

Exercice 3

La suite (u_n) de *Fibonacci* est définie par : $u_0 = 1; u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2) Déduire pour $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

3) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, puis $x_n = v_{2n}$ et $y_n = v_{2n+1}$.

   a) Démontrer la relation $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ pour tout entier naturel n.

   b) Démontrer la relation $v_{n+2} - v_n = \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n+2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c) En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

   d) En déduire que la suite (v_n) converge. Quelle est sa limite ?

5) Montrer que u_n s'écrit sous la forme $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ o r_1, r_2 les solutions de l'équation $r^2 = r + 1$ et λ, μ deux constantes à trouver.

6) Retrouver le résultat de *4.d* .

Exercice 1

$\boxed{Q\,1}$

$(i) \Rightarrow (ii)$: soit $y \in E$. Puisque $f \circ f = f$, $f(y) = f\big(f(y)\big)$. Or f est injective, donc $y = f(y)$. Posons $x = f(y)$, on a $y = f(x)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: soient $(x_1,x_2) \in E^2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Comme f est surjective, il existe $(x'_1,x'_2) \in E^2$ tels que $x_1 = f(x'_1)$ et $x_2 = f(x'_2)$. On a donc $f\big(f(x'_1)\big) = f\big(f(x'_2)\big)$. Puisque $f \circ f = f$, on en tire que $f(x'_1) = f(x'_2)$ c'est à dire $x_1 = x_2$.

$\boxed{Q\,2}$

$\subset$: soit $y \in f(A)$. Par définition de l'image directe, $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $f \circ f = f$, $y = f\big(f(x)\big)$. Posons $z = f(x)$. On a $x \in A$ avec $z = f(x)$, et donc $z \in f(A)$ (définition de l'image directe). Puisque $y = f(z)$ avec $z \in f(A)$, on en déduit que $y \in f\big(f(A)\big)$ (définition de l'image directe).

$\supset$: soit $z \in f\big(f(A)\big)$. Par définition de l'image directe, $\exists y \in f(A)$ tel que $z = f(y)$. Comme $y \in f(A)$, $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$ (définition de l'image directe). Alors $z = f\big(f(x)\big) = f \circ f(x)$. Mais puisque $f \circ f = f$, on a $z = f(x)$. Comme $z = f(x)$ avec $x \in A$, on en déduit que $z \in f(A)$ (définition de l'image directe).

$\boxed{Q\,3}$

$\subset$: soit $x \in f^{-1}\big(f^{-1}(A)\big)$. Par définition de l'image réciproque, on a $f(x) \in f^{-1}(A)$. Par définition de l'image réciproque, on a donc $f\big(f(x)\big) \in A$. Mais comme $f \circ f = f$, on en tire que $f(x) \in A$, c'est à dire $x \in f^{-1}(A)$ (définition de l'image réciproque).

$\supset$: soit $x \in f^{-1}(A)$. Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in A$. Puisque $f \circ f = f$, on en tire que $f\big(f(x)\big) = f(x) \in A$. Par conséquent, $f(x) \in f^{-1}(A)$ (définition de l'image réciproque) et ensuite $x \in f^{-1}\big(f^{-1}(A)\big)$ (définition de l'image réciproque).

Exercice 2

1. A est une partie majorée et B une partie minorée. Comme A et B sont non vides, $\sup A$ et $\inf B$ existent.
   Tout x de A est un minorant de B et tout $y \in B$ est un majorant de A. Donc $x \leq \inf B$ et $\sup B \leq y$, donc
   $$\sup A \leq \sup B$$
   car $\inf B$ est un majorant de A et $\sup A$ est le plus petit des majorants de A.
2. Posons $m = \sup A = \sup B$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ et $y \in B$ tel que
   $$m - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq m \text{ et } m \leq y < m + \frac{\varepsilon}{2}.$$
   En changeant de signe et en ajoutant, on obtient
   $$-\frac{\varepsilon}{2} < x - y < \frac{\varepsilon}{2},$$
   soit
   $$|x - y| < \varepsilon.$$

Exercice 3

1) Montrer que $u_n \geq 0$ par récurrence forte .
2) Montrer que $u_n \geq n$ par récurrence forte .
3) Poser $a_n = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$ et prouver la relation $a_n = -a_{n-1}$.
4) .
   a) Facile .
   b) $v_{n+2} - v_n = \dfrac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_n u_{n+2}} = \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n+2}}$.
   c) $x_{n+1} - x_n = v_{2n+2} - v_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n}}{u_{2n}u_{2n+2}} = \dfrac{1}{u_{2n}u_{2n+2}} > 0$.
   $$y_{n+1} - y_n = v_{2n+3} - v_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{u_{2n+1}u_{2n+3}} = -\frac{1}{u_{2n+1}u_{2n+3}} < 0$$
   . Enfin, $y_n - x_n = v_{2n+1} - v_{2n} = \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} - \dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \dfrac{u_{2n+2}u_{2n} - u_{2n+1}^2}{u_{2n}u_{2n+1}} = \dfrac{1}{u_{2n}u_{2n+1}} \longrightarrow 0$
   d) Notons $l = \lim(v_n)$ $\quad v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ donc $l > 0, l = 1 + \dfrac{1}{l}$ c-a-d $l^2 = l + 1$ d'où $l = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
5) Par récurrence forte. À l'aide des conditions initiales $u_0 = \lambda + \mu = 0$ $\quad , u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 = 1$ on trouve les constantes .
6) On note $r_1 = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, r_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ donc $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}}{\lambda r_1^n + \mu r_2^n}$ on factorise par r_1^{n+1} en haut et par r_1^n en bas et tend *n* vers $+\infty$

Fin