

Corrigé

Problème 3 : Suites Numériques

Partie II :

1. Etude préliminaire :

(a) On pose $(\mathcal{H}_n) : u_n \geq 1$.

Initialisation : (\mathcal{H}_0) est vraie car $u_0 = 2 \geq 1$.

Hérédité : Supposons que (\mathcal{H}_n) est vraie i.e. " $u_n \geq 1$ " et démontrons (\mathcal{H}_{n+1}) i.e. " $u_{n+1} \geq 1$ ".

On a $u_{n+1} - 1 = \frac{1+2u_n}{2+u_n} - 1 = \frac{u_n - 1}{2+u_n}$ avec $u_n - 1 \geq 0$ et $2+u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq 1$ donc (\mathcal{H}_{n+1}) est vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 0, (\mathcal{H}_n)$ est vraie i.e. $\forall n \geq 0, u_n \geq 1$.

(b) Si $u_n \rightarrow l$ alors $u_{n+1} \rightarrow l$ et $\frac{1+2u_n}{2+u_n} \rightarrow \frac{1+2l}{2+l}$ donc $l = \frac{1+2l}{2+l} \Leftrightarrow 2l + l^2 = 1 + 2l \Leftrightarrow l^2 = 1 \Leftrightarrow l = 1$ ou $l = -1$. On sait en outre, que $\forall n \geq 0, u_n \geq 1$ donc $l \geq 1$. Ainsi, si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge, elle converge vers 1.

2. Première méthode :

(a) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{1+2u_n}{2+u_n} - 1}{\frac{1+2u_n}{2+u_n} + 1} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 3} = \frac{1}{3} \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1}{3} v_n$ donc v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

(b) $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n v_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{2-1}{2+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$. On en déduit que

$$\frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \Leftrightarrow (u_n - 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} (u_n + 1) \Leftrightarrow u_n \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$$

(c) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ donc $u_n \rightarrow 1$.


3. Deuxième méthode :

(a) $f(x) = \frac{1+2x}{2+x} - x = \frac{-x^2 + 1}{2+x} = \frac{(1-x)(1+x)}{2+x}$ donc on obtient aisément le tableau de signe de f .

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$1-x$		+		+		+	0	-	
$1+x$		-		-	0	+		+	
$2+x$		-	0	+		+		+	
$f(x)$		+		-	0	+	0	-	

(b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ et $\forall n \geq 0, u_n \geq 1$ donc $f(u_n) - u_n \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc décroissante.

(c) La suite u est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers une limite l telle que $l \geq 1$. En outre, sa limite l vérifie l'équation $l = \frac{1+2l}{2+l} \Leftrightarrow l = 1$ ou $l = -1$ donc la suite u converge vers 1.

 Exercices Application de Cours

Exercice 2 :

Q 1

(i) \Rightarrow (ii) : soit $y \in E$. Puisque $f \circ f = f$, $f(y) = f(f(y))$. Or f est injective, donc $y = f(y)$. Posons $x = f(y)$, on a $y = f(x)$.

(ii) \Rightarrow (i) : soient $(x_1, x_2) \in E^2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Comme f est surjective, il existe $(x'_1, x'_2) \in E^2$ tels que $x_1 = f(x'_1)$ et $x_2 = f(x'_2)$. On a donc $f(f(x'_1)) = f(f(x'_2))$. Puisque $f \circ f = f$, on en tire que $f(x'_1) = f(x'_2)$ c'est à dire $x_1 = x_2$.

Q 2

\subset : soit $y \in f(A)$. Par définition de l'image directe, $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $f \circ f = f$, $y = f(f(x))$. Posons $z = f(x)$. On a $x \in A$ avec $z = f(x)$, et donc $z \in f(A)$ (définition de l'image directe). Puisque $y = f(z)$ avec $z \in f(A)$, on en déduit que $y \in f(f(A))$ (définition de l'image directe).

\supset : soit $z \in f(f(A))$. Par définition de l'image directe, $\exists y \in f(A)$ tel que $z = f(y)$. Comme $y \in f(A)$, $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$ (définition de l'image directe). Alors $z = f(f(x)) = f \circ f(x)$. Mais puisque $f \circ f = f$, on a $z = f(x)$. Comme $z = f(x)$ avec $x \in A$, on en déduit que $z \in f(A)$ (définition de l'image directe).

Q 3

\subset : soit $x \in f^{-1}(f^{-1}(A))$. Par définition de l'image réciproque, on a $f(x) \in f^{-1}(A)$. Par définition de l'image réciproque, on a donc $f(f(x)) \in A$. Mais comme $f \circ f = f$, on en tire que $f(x) \in A$, c'est à dire $x \in f^{-1}(A)$ (définition de l'image réciproque).

\supset : soit $x \in f^{-1}(A)$. Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in A$. Puisque $f \circ f = f$, on en tire que $f(f(x)) = f(x) \in A$. Par conséquent, $f(x) \in f^{-1}(A)$ (définition de l'image réciproque) et ensuite $x \in f^{-1}(f^{-1}(A))$ (définition de l'image réciproque).

Exercice 3 :

Question 1 :

On constate que la suite u est arithmético-géométrique puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$. Nous allons alors expliciter u_n

en fonction de n selon la méthode classique. Soit $L \in \mathbb{R}$ tel que $L = \frac{2}{3}L + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}L = \frac{1}{3} \Leftrightarrow L = 1$.

On considère la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 1) = \frac{2}{3}v_n.$$

On en déduit que la suite v est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n v_0 \Leftrightarrow u_n - 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - 1) \Leftrightarrow u_n = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - 1)$$

ce qui permet d'écrire:

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^k (u_0 - 1) \right] = \left(\sum_{k=0}^n 1 \right) + (u_0 - 1) \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k \right) = (n+1) + (u_0 - 1) \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

Question 2 :

On constate que la suite u est récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants. Nous allons alors expliciter u_n en fonction de n .

La suite u admet comme polynôme caractéristique $3x^2 - 5x + 2$ dont les racines sont $\frac{2}{3}$ et 1. Par conséquent, il existe deux constantes réelles α et β telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta \times 1^n = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta.$$

Pour déterminer α et β , il suffit d'utiliser les conditions initiales.

$$\begin{cases} \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \beta = u_0 \\ \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \beta = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \frac{2}{3}\alpha + \beta = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ -\frac{1}{3}\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 5.$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{2004} u_k &= \sum_{k=2}^{2004} \left[-3\left(\frac{2}{3}\right)^k + 5 \right] = -3 \sum_{k=2}^{2004} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \sum_{k=2}^{2004} 5 = -3 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2004} \right) + 5(2004 - 2 + 1) \\ &= -3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2002} \right) + 5 \times 2003 = -\frac{4}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2003}}{1 - \frac{2}{3}} + 10015 \\ &= -4\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2003}\right) + 6015 = 6011 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{2003} \end{aligned}$$

Question 3 :

1. La suite u $n \in \mathbb{N}, \quad u_n = an + \quad E$ ssi

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n &= 3n - 1 \\ \Leftrightarrow [a(n+2)^3 + b(n+2)^2] - 2[a(n+1)^3 + b(n+1)^2] + [an^3 + bn^2] &= 3n - 1 \text{ (puis on développe)} \\ \Leftrightarrow [a(n^3 + 6n^2 + 12n + 8) + b(n^2 + 4n + 4)] - 2[a(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + b(n^2 + 2n + 1)] + [an^3 + bn^2] &= 3n - 1 \\ \text{on regroupe ensuite les différentes puissances de } n & \\ \Leftrightarrow n^3(a - 2a + a) + n^2(6a + b - 6a - 2b + b) + n(12a + 4b - 6a - 4b) + (8a + 4b - 2a - 2b) &= 3n - 1 \\ \Leftrightarrow 6an + (6a + 2b) = 3n - 1 \quad \text{principe d'identification} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 3 \\ 6a + 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite u vérifie (E) ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2}n^3 - 2n^2.$

2. Pour tout entier naturel n , on a :

$$z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = (w_{n+2} - u_{n+2}) - 2(w_{n+1} - u_{n+1}) + (w_n - u_n) = \underbrace{(w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n)}_{=3n-1 \text{ par définition}} - \underbrace{(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)}_{=3n-1 \text{ par construction}} = 0$$

donc la suite z est bien récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $x^2 - 2x + 1$ qui admet une unique racine $x = 1$. Par conséquent, il existe deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = (\alpha n + \beta)1^n = \alpha n + \beta$$

Puisque nous connaissons la forme de z ainsi que la forme de u , nous en déduisons la forme de w

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n + z_n = \frac{1}{2}n^3 - 2n^2 + \alpha n + \beta, \text{ où } \alpha, \beta \text{ sont deux réels}$$



Problème 1 : Ensembles et Application

ITÉRÉES D'UNE APPLICATION D'UN ENSEMBLE FINI

Première partie : étude de trois exemples

1. L'application f n'est pas bijective car par exemple $f(5) = f(6)$.

Il en est de même pour g car par exemple $g(6) = g(8)$.

L'application h est bijective (tout élément de E_{10} possède un antécédent unique).

On trouve sa bijection réciproque $h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 7 & 3 & 1 & 6 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

2. On trouve successivement :

$$\begin{aligned} f^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 7 & 9 & 4 & 6 & 6 & 3 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} & f^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 9 & 3 & 6 & 4 & 4 & 7 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} \\ f^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 3 & 7 & 4 & 6 & 6 & 9 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix} & f^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 7 & 9 & 6 & 4 & 4 & 3 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \\ f^6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 9 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} & f^7 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 3 & 7 & 6 & 4 & 4 & 9 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix} \\ f^8 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 7 & 9 & 4 & 6 & 6 & 3 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On constate que les applications Id, f, \dots, f^7 sont distinctes, mais que $f^8 = f^2$.

3. L'égalité $f^8 = f^2$ donne, pour tout m de \mathbb{N} : $f^m \circ f^8 = f^m \circ f^2$ c'est-à-dire $f^{m+8} = f^{m+2}$.

En posant $k = m + 2$, il revient au même d'écrire : $f^{k+6} = f^k$ pour tout entier $k \geq 2$.

La suite des $(f^k)_{k \geq 0}$ des puissances de f est donc 6-périodique à partir de $k = 2$.

Cette périodicité implique que $\{f^k, k \geq 0\} = \{\text{Id}, f, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7\}$: l'ensemble des puissances de f se réduit donc aux 8 premières puissances f^0, \dots, f^7 toutes distinctes.

4. On trouve successivement :

$$\begin{aligned} g^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 6 & 3 & 4 & 3 & 6 & 2 & 6 & 10 & 3 \end{pmatrix} & g^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 3 & 6 & 4 & 6 & 3 & 10 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \\ g^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 6 & 3 & 4 & 3 & 6 & 6 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} & g^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 3 & 6 & 4 & 6 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \\ g^6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 6 & 3 & 4 & 3 & 6 & 6 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On constate que les applications $\text{Id}, g, g^2, g^3, g^4, g^5$ sont distinctes, mais que $g^6 = g^4$.

On en déduit $g^{k+2} = g^k$ pour tout entier $k \geq 4$.

Avec les définitions précédentes, l'application g est donc de délai 4 et de période 2.

5. On trouve immédiatement :

$$h^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 7 & 3 & 1 & 6 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}, h^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \text{Id}.$$

Ainsi les applications $f^0 = \text{Id}, h, h^2$ sont distinctes, mais $h^3 = \text{Id}$.

On en déduit $h^{k+3} = h^k$ pour tout entier $k \geq 0$.

Avec les définitions précédentes, l'application h est donc de délai 0 et de période 3.

Deuxième partie : généralisation

1. L'ensemble E_n étant formé de n éléments, il y a n^n applications de E_n dans lui-même.
Pour définir un élément f de \mathcal{F}_n , il faut en effet choisir arbitrairement $f(1)$ parmi les n éléments de E_n , puis choisir $f(2)$ (à nouveau n choix possibles, indépendants du précédent), etc. jusqu'à choisir $f(n)$ de façon quelconque dans E_n (donc n choix successifs et indépendants offrant chacun n possibilités).

2. (a) Si les puissances f^k de f (avec k dans \mathbb{N}) étaient distinctes deux à deux, on disposerait ainsi d'une infinité d'applications différentes de E_n dans lui-même, c'est-à-dire d'une infinité d'éléments différents de \mathcal{F}_n , ce qui est absurde car \mathcal{F}_n est un ensemble fini.

(b) L'ensemble $X_f = \{m \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}^*, f^{m+q} = f^m\}$ est non vide (question précédente).

Cette partie non vide de \mathbb{N} possède donc un plus petit élément, que nous notons d .

L'ensemble des entiers $q \geq 1$ tels $f^{d+q} = f^d$ est une partie non vide de \mathbb{N}^* (car d est dans X_f) et possède donc un plus petit élément que nous notons p .

On a donc prouvé l'existence d'un plus petit entier naturel d , et pour celui-ci d'un plus petit entier naturel strictement positif p tel que $f^{d+p} = f^d$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à d .

Compte tenu $f^{d+p} = f^d$, on a $f^{n+p} = f^{n-d} \circ f^{d+p} = f^{n-d} \circ f^d = f^n$.

Cela signifie que la suite des f^k est périodique de période p à partir de $k = d$.

(c) Montrons que les $p + d$ premières puissances $\text{Id}, f, \dots, f^d, f^{d+1}, \dots, f^{d+p-1}$ de f sont distinctes deux à deux.

Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe deux entiers q et r tels que $0 \leq q < r < d + p$ et $f^q = f^r$.

L'égalité $q < d$ est impossible car cela contredirait le caractère minimal de d .

On a donc $f^q = f^r$ avec $d \leq q < r < d + p$ (et en particulier $r - q < p$).

Mais $f^q = f^r \Rightarrow f^{d+p-q} \circ f^q = f^{d+p-q} \circ f^r \Rightarrow f^{d+p} = f^{d+r-q+p}$.

Par p -périodicité, on a $f^{d+p} = f^d$ et $f^{d+r-q+p} = f^{d+r-q}$ (car $d + r - q \geq d$).

On arrive donc à l'égalité $f^d = f^{d+r-q}$, avec $0 < r - q < p$, ce qui contredit le caractère minimal de p .

Conclusion : les $d + p$ applications $\text{Id}, f, \dots, f^d, \dots, f^{d+p-1}$ de f sont distinctes.

(d) Posons $P_f = \{\text{Id}, f, \dots, f^d, \dots, f^{d+p-1}\}$, et soit k un entier naturel quelconque.

Si $k < d$, le problème de l'appartenance de f^k à P_f ne se pose même pas...

Si $k \geq d$, on écrit $k - d = qp + r$ avec $q \geq 0$ et $0 \leq r < p$ (division de $k - d$ par p).

On en déduit $f^k = f^{d+r+qp} = f^{d+r}$ (à cause la p -périodicité à partir de f^d).

Ainsi $f^k = f^{d+r}$ avec $d \leq d + r < d + p$ donc f^k est élément de P_f .

Finalement toutes les puissances de f sont dans P_f , la réciproque étant évidente.

3. Soit f un élément de \mathcal{F}_n .

— Si $d = 0$, l'égalité $f^{d+p} = f^d$ s'écrit $f^p = \text{Id}$.

Cette égalité implique que f est bijective (sa bijection inverse étant f^{p-1}).

— Réciproquement, si f est bijective, alors $f^{d+p} = f^d \Rightarrow f^d \circ f^p = f^d$ qui implique $f^p = \text{Id}$ en composant par l'application $(f^d)^{-1} = f^{-d}$.

Ainsi $f^0 = f^p$, ce qui signifie que f est de délai 0 (car la suite des puissances de f est p -périodique à partir de f^0).

Conclusion : l'application f est bijective si et seulement si son délai d est nul.

 Problème 2 : Nombres Réels

Corrigé de l'exercice 1 :

1. La propriété est évidente si $n = 1$, et on suppose qu'elle est vraie pour un rang $n \geq 1$ fixée.

On se donne donc $(x_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ tels que $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = 1$, et on veut montrer que $\sum_{k=1}^{n+1} x_k \geq n + 1$.

Par symétrie du problème, on peut bien supposer que $\min_{1 \leq k \leq n+1} x_k = x_n$ et que $\max_{1 \leq k \leq n+1} x_k = x_{n+1}$.

Avec ce choix, l'égalité $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = 1$ nous assure alors que : $0 < x_n \leq 1 \leq x_{n+1}$.

Mais cette même égalité s'écrit aussi $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} (x_n x_{n+1}) = 1$.

En vertu de l'hypothèse de récurrence, il en résulte : $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geq n$.

Ainsi $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n + x_{n+1} \geq n - x_n x_{n+1} + x_n + x_{n+1} = n + 1 + (x_{n+1} - 1)(1 - x_n) \geq n + 1$

Ce qui prouve l'inégalité au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

Mais l'égalité au rang $n + 1$ implique $x_n = \min_{1 \leq k \leq n+1} x_k = 1$, ou $x_{n+1} = \max_{1 \leq k \leq n+1} x_k = 1$.

Sachant que $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = 1$, ce c'est possible que si tous les x_k sont égaux à 1.

Conclusion : pour tout $n \geq 1$, soit $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ dans \mathbb{R}^{+*} tels que $\prod_{k=1}^n x_k = 1$.

Alors $\sum_{k=1}^n x_k \geq n$, avec égalité \Leftrightarrow tous les x_k sont égaux (à 1).

2. C'est une conséquence immédiate de ce qui précède, car les $z_k = \frac{y_k}{x_k}$ sont dans \mathbb{R}^{+*} et $\prod_{k=1}^n z_k = 1$.

On peut ajouter que l'égalité $\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} + \cdots + \frac{y_n}{x_n} = n$ n'est possible que si $y_k = x_k$ pour tout k .

Corrigé de l'exercice 2 :

1. On pose $x_k = \frac{a_k}{G_n}$. Les x_k sont dans \mathbb{R}^{+*} et $\prod_{k=1}^n x_k = \frac{1}{G_n^n} \prod_{k=1}^n a_k = 1$ (par définition de G_n).

On en déduit $\sum_{k=1}^n x_k \geq n$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^n a_k \geq nG_n$, c'est-à-dire $A_n \geq G_n$.

On peut ajouter que l'égalité $A_n = G_n$ n'est possible que si les x_k (et donc les a_k) sont tous égaux.

2. On pose $x_k = \frac{G_n}{a_k}$. Les x_k sont dans \mathbb{R}^{+*} et $\prod_{k=1}^n x_k = G_n^n \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{-1} = 1$ (par définition de G_n).

On en déduit $\sum_{k=1}^n x_k \geq n$, c'est-à-dire $G_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq n$, c'est-à-dire $G_n \geq H_n$.

Là encore, l'égalité $G_n = H_n$ n'est possible que si les x_k (et donc les a_k) sont tous égaux.

Corrigé de l'exercice 3 :

1. On utilise l'inégalité $A_n \geq G_n$ avec $a_1 = 1 + nx$, et $a_k = 1$ pour $2 \leq k \leq n$.

On a alors $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 1 + x$ et $G_n = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} = \sqrt[n]{1 + nx}$.

L'inégalité $A_n \geq G_n$ s'écrit ici $1 + x \geq \sqrt[n]{1 + nx}$, c'est-à-dire $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

2. Posons $x_1 = \frac{b+c}{2}$, $x_2 = \frac{c+a}{2}$ et $x_3 = \frac{a+b}{2}$, donc $x_1 + x_2 + x_3 = a + b + c$.

L'inégalité à prouver s'écrit $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \geq \frac{9}{x_1 + x_2 + x_3}$, donc $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq 3 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right)^{-1}$

et le résultat en découle car on reconnaît l'inégalité $A_n \geq H_n$.

3. Pour $n \geq 2$, il est clair que $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} < \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} < 1$.

La moyenne harmonique des $\frac{1}{k}$ est $H_n = n \left(\sum_{k=n}^{2n-1} k \right)^{-1} = n \left(n \frac{3n-1}{2} \right)^{-1} = \frac{2}{3n-1}$.

L'inégalité $A_n \geq H_n$ s'écrit : $\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{2}{3n-1} > \frac{2}{3}$ et on a obtenu $1 > \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} > \frac{2}{3}$.

4. On commence par écrire : $n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$

Enduite, l'inégalité $A_n \geq G_n$ donne : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \geq \left(\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \right)^{1/n} = \sqrt[n]{n+1}$

On a donc bien obtenu l'inégalité : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq n(\sqrt[n]{n+1} - 1)$.

Corrigé de l'exercice 4 :

1. L'inégalité est évidente si $n = 1$ car elle se réduit à l'égalité $a = a$.

On suppose donc qu'elle est démontrée au rang n , et pour tous $a > 0$ et $b \geq 0$.

Il s'agit donc de prouver l'inégalité $a(a + (n+1)b)^n \leq (a + nb)^{n+1}$, avec $a > 0$ et $b \geq 0$.

On écrit : $a(a + (n+1)b)^n = a(a + (n+1)b)(a' + nb)^{n-1}$ avec $a' = a + b > 0$.

Mais on sait qu'alors $(a' + nb)^{n-1} \leq \frac{1}{a'}(a' + (n-1)b)^n$ (hypothèse de récurrence).

On obtient donc : $a(a + (n+1)b)^n \leq \frac{a(a + (n+1)b)}{a+b} (a + nb)^n$.

Pour conclure, on constate que : $a(a + (n+1)b) \leq (a + nb)(a + b)$ (évident par développement).

Conclusion : on a prouvé $a(a + nb)^{n-1} \leq (a + (n-1)b)^n$ pour tout n de \mathbb{N}^* , et $a > 0$ et $b \geq 0$.

2. Puisque la suite $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est arithmétique, on a : $\sum_{k=1}^n x_k = n \frac{x_1 + x_n}{2}$, c'est-à-dire $A_n = \frac{x_1 + x_n}{2}$.

L'inégalité $\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_n}{2}$ est donc un cas particulier de $G_n \leq A_n$.

Il s'agit maintenant de prouver l'inégalité $\sqrt[n]{x_1 x_n} \leq \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n}$, ou encore $(x_1 x_n)^n \leq \prod_{k=1}^n x_k^2$.

Le résultat est évident si $n = 1$. On suppose donc qu'il est vrai au rang $n \geq 1$.

On se donne la suite $(x_k)_{1 \leq k \leq n+1}$, arithmétique à valeurs dans \mathbb{R}^{+*} .

Il faut montrer que $(x_1 x_{n+1})^{n+1} \leq \prod_{k=1}^{n+1} x_k^2$, sachant que $(x_1 x_n)^n \leq \prod_{k=1}^n x_k^2$.

On écrit : $(x_1 x_{n+1})^{n+1} = x_1 x_n \left(x_1 x_n \right)^n \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{n+1} \underset{HR_n}{\leq} x_1 x_n \left(\prod_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{n+1}$

Il suffit donc de prouver $x_1 x_n \left(\prod_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{n+1} \leq \prod_{k=1}^{n+1} x_k^2$, c'est-à-dire : (E) : $x_1 x_{n+1}^{n-1} \leq x_n^n$.

Or avec $x_1 = a$ et si b est la raison de la suite (x_k) cette inégalité s'écrit $a(a+nb)^{n-1} \leq (a+(n-1)b)^n$, ce qui est précisément le résultat obtenu à la question précédente (ça doit être fait exprès).

Remarque : on a ici supposé $b \geq 0$ ce qui revient à dire que la suite arithmétique (x_k) est croissante, mais la symétrie du problème posé fait qu'on peut effectivement se ramener à cette hypothèse.


3. Il suffit d'appliquer ce qui précède à la suite arithmétique de raison $k \mapsto x_k = k$.

4. On sait que l'inégalité $H_n \leq A_n$ s'écrit : $n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)^{-1} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ ou encore : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \sum_{k=1}^n x_k \geq n^2$
De $\sum_{k=1}^n x_k \leq 1$, il découle donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$

5. On sait que $1 + x_k \geq 2\sqrt{x_k}$ pour tout k (c'est un cas particulier d'inégalité $A_n \geq G_n$).

On en déduit : $\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \geq 2^n \prod_{k=1}^n x_k$ donc $\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \geq 2^n$.



 **Problème 3 : Suites Numériques**

Partie I :

1. $u_1 = \frac{1}{0+1} - u_0 = 1 - \ln 2, \quad u_2 = \frac{1}{1+1} - (1 - \ln 2) = \ln 2 - \frac{1}{2}, \quad u_3 = \frac{1}{2+1} - (\ln 2 - \frac{1}{2}) = \frac{5}{6} - \ln 2.$

2. On pose $(\mathcal{H}_n) : u_n \leq \frac{1}{n}.$

Initialisation : (\mathcal{H}_1) est vraie car $u_1 = 1 - \ln 2 \simeq 0,3$ donc $u_1 \leq 1$

Hérédité : Supposons que (\mathcal{H}_n) est vraie i.e. " $u_n \leq \frac{1}{n}$ " et démontrons (\mathcal{H}_{n+1}) i.e. " $u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ ".

$u_n \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ donc (\mathcal{H}_{n+1}) est vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 0, (\mathcal{H}_n)$ est vraie i.e. $\forall n \geq 0, u_n \leq \frac{1}{n}.$

3. L'inégalité $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ combinée au théorème d'encadrement implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$

4.

(a) $w_{n+1} = (-1)^n u_{n+1} = (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - u_n \right) = \frac{(-1)^n}{n+1} - (-1)^n u_n \underset{-1=(-1)^{-1}}{=} \frac{(-1)^n}{n+1} + (-1)^{n-1} u_n = w_n + \frac{(-1)^n}{n+1}.$

(b) On pose $(\mathcal{H}_n) : w_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2.$

Initialisation : (\mathcal{H}_1) est vraie car $w_1 = u_1 = 1 - \ln 2 = \sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2.$

Hérédité : Supposons que (\mathcal{H}_n) est vraie i.e. " $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$ " et démontrons (\mathcal{H}_{n+1})

i.e. " $w_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$ ".

$w_{n+1} = w_n + \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 + \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1} - \ln 2 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$
donc (\mathcal{H}_{n+1}) est vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 0, (\mathcal{H}_n)$ est vraie i.e. $\forall n \geq 0, w_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2.$

(c) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et la suite $((-1)^{n-1})_{n \geq 0}$ est bornée donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n-1} u_n = 0$

ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$