Simulation DS N°4

Fonctions Réelles-Développements Limités

14 Janvier 2019

Durée : 1 heure

On rappelle que le nombre $e = \exp(1) \approx 2{,}72$, $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ et $\ln(3) \approx 1{,}10$.

I Etude d'une fonction.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = 3x\exp(-x^2) - 1 = 3xe^{-x^2} - 1$.

1 Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Donner le tableau de variations de f. Préciser les branches infinies de la courbe représentative C_f de f.

2 Calculer $f''(x)$. Qu'en déduit-on pour le point de C_f d'abscisse 0 ?

3 Donner l'équation de la tangente en 0. Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la tangente au point d'abscisse 0. Quel résultat retrouve-t-on ?

4 Donner l'allure de la courbe C_f de f.

5

a) Pourquoi f admet-elle des développements limités en 0 à n'importe quel ordre ?

b) Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 5.

III Etude de deux suites.

On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2. Soit $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1 = 3x^n \exp(-x^2) - 1$.

9 Quel est le signe de $f_n(0)$, de $f_n(1)$?

10 Etudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0,+\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n, qui vérifient $u_n < 1 < v_n$.

11 Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$?

12

a) Calculer $\exp(-u_n^{\,2}) = e^{-u_n^{\,2}}$ en fonction de $u_n^{\,n}$.

b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

c) Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente. Soit l sa limite.

13 Soit g_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0$, $g_n(x) = \ln 3 + n\ln x - x^2$.

a) Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.

b) On suppose que : $l \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclusion ?

c) Soit la suite $(w_n)_{n\geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2$ $w_n = u_n - 1$. Trouver en utilisant un développement limité de $g_n(1+w_n) = g_n(u_n)$ un équivalent simple de w_n.

FIN

REVU & CORRIGE

I

1 L'application f est produit et composée de fonction C^∞ donc est C^∞. $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3\exp(-x^2)-6x^2\exp(-x^2)=(3-6x^2)\exp(-x^2)$. $f'(x)$ est du même signe que $3-6x^2$ qui s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ qui est positif sur $]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ et négatif sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$

Si $x>0$ $3x\exp(-x^2)=\frac{3x}{e^{x^2}}=3\frac{\sqrt{x^2}}{e^{x^2}}$ donc a pour limite 0 en $+\infty$ donc si f a pour limite -1 en $+\infty$

Si $x<0$ $3x\exp(-x^2)=\frac{3x}{e^{x^2}}=3\frac{-\sqrt{x^2}}{e^{x^2}}$ donc a pour limite 0 en $+\infty$ donc si f a pour limite -1 en $-\infty$

D'où le tableau de variations :

X	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\downarrow$		$\uparrow$		$\downarrow$	-1

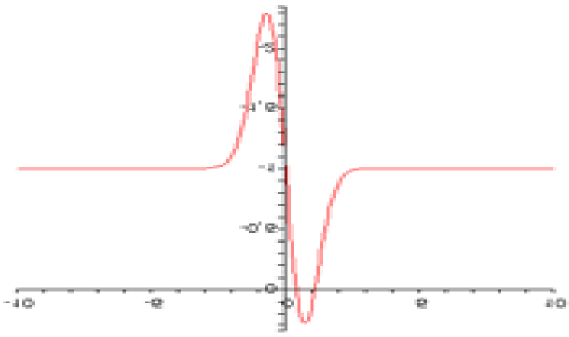
La droite $y=-1$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

2 $f''(x)=-12x\exp(-x^2)-2x(3-6x^2)\exp(-x^2)=(12x^3-18x)\exp(-x^2)$. $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en 0 donc le point d'abscisse 0 de C_f est un point d'inflexion.

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y=f'(0)(x-0)+f(0)=3x-1$.

Soit $g(x)=3x-1$. $f(x)-g(x)=3x\exp(-x^2)-1-(3x-1)=3x(\exp(-x^2)-1)$ Pour tout x de $\mathbb{R}^*$ $\exp(-x^2)<1$ car $x^2>0$ donc $\exp(-x^2)-1<0$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ donc $f(x)-g(x)$ est du signe contraire à x donc change de signe en 0. On retrouve que C_f admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

4.



5a f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc admet en 0 des DL jusqu'à n'importe quel ordre.

b $\exp(-x^2)=1-x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)$ donc $f(x)=3x(1-x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4))-1=-1+3x-3x^3+\dfrac{3}{2}x^5+o(x^5)$.

III

9. $f_n(0)=-1<0$ $f_n(1)=\dfrac{3}{e}-1$ comme $e<3$ on a $f(1)>0$.

10. $\forall x\geq 0$ $f_n'(x)=(3nx^{n-1}-6x^{n+1})e^{-x^2}=3x^{n-1}(n-2x^2)e^{-x^2}$. Donc $f_n'(x)$ est du même signe que $n-2x^2$ donc s'annule en $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ est positif si $x<\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ et négatif sinon $\dfrac{x^n}{e^{x^2}}=\dfrac{(x^2)^{\frac{n}{2}}}{e^{x^2}}$ donc tend vers 0 donc $f_n(x)$ tend vers -1 en $+\infty$ d'où le tableau de variations suivant :

x	0	$\sqrt{\dfrac{n}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	-1 $\nearrow$	$f(\sqrt{\dfrac{n}{2}})$	$\searrow$ -1

f est continue et strictement croissante sur $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ donc est une bijection entre $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ et $f([0, \sqrt{\frac{n}{2}}]) = [-1, f(\sqrt{\frac{n}{2}})]$ Or $0<1<\sqrt{\frac{n}{2}}$ donc $0<f(1)<f(\sqrt{\frac{n}{2}})$ donc 0 appartient à $f([0, \sqrt{\frac{n}{2}}])$ donc il existe u_n unique de $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ tel que $f(u_n)=0$ comme $f(u_n)=0<f(1)$ comme f est une bijection strictement croissante $u_n<1$. On montre de même qu'il existe v_n unique de $[\sqrt{\frac{n}{2}},+\infty[$ tel que $f(v_n)$ car f strictement décroissante et continue sur $[\sqrt{\frac{n}{2}},+\infty[$.

donc pour tout n de $\mathbb{N}$ $n\geq 2$ il existe u_n et v_n uniques qui annulent f et tels que : $u_n<1<\sqrt{\frac{n}{2}}<v_n$.

11 $(v_n)_{n\geq 2}$ est minorée par la suite $(\sqrt{\frac{n}{2}})_{n\geq 2}$ qui diverge vers $+\infty$ donc diverge vers $+\infty$.

12

a) $f_n(u_n)=0$ donc $3u_n^n e^{-u_n^2}=1$ donc $e^{-u_n^2}=\frac{1}{3u_n^n}$.

b) $f_{n+1}(x)=3x^{n+1}e^{-x^2}-1$ donc $f_{n+1}(u_n)=3u_n^{n+1}e^{-u_n^2}-1=3\frac{u_n^{n+1}}{3u_n^n}-1=u_n-1<0$ car $u_n<1$.

c) Or f_{n+1} est une bijection strictement croissante sur $[0,\frac{\sqrt{n+1}}{2})$ donc comme $f_{n+1}(u_n)<0=f_{n+1}(u_{n+1})$ donc $u_n<u_{n+1}$ la suite (u_n) est strictement croissante.

d) (u_n) est croissante et majorée par 1 donc est convergente vers $l\leq 1$.

13

a) $f_n(t)=0 \Leftrightarrow 3t^n e^{-t^2}-1=0 \Leftrightarrow 3t^n e^{-t^2}=1 \Leftrightarrow \ln(3t^n e^{-t^2})=\ln(1)=0 \Leftrightarrow \ln(3)+\ln(t^n)+\ln(e^{-t^2})=0$
$\Leftrightarrow \ln(3)+n\ln(t)-t^2=0 \Leftrightarrow g_n(t)=0$.

b) On a $\ln(3)+n\ln(u_n)-u_n^2=0$ car $f_n(u_n)=0 \Leftrightarrow g_n(u_n)=0$. Si (u_n) converge vers $l\neq 1$ alors $(\ln(u_n))$, converge vers $\ln l<0$ et (u_n^2) converge vers l^2 donc $(n\ln(u_n))$ diverge vers $-\infty$ donc $(\ln(3)+n\ln(u_n)-u_n^2)$. diverge vers $-\infty$ ce qui est impossible car elle vaut toujours 0 donc $l=1$.

c) On a $\ln(3)+n\ln(u_n)-u_n^2=0$ donc $\ln(3)+n\ln(1+w_n)-(1+w_n)^2=0$ donc en utilisant le D.L de $\ln(1+x)$ jusqu'à l'ordre 1 [$\ln(1+x)=x+o(x)$] on a $\ln(3)+n(w_n+o(w_n))-1-2w_n-w_n^2=0$ donc

$w_n(n-w_n+o(1)-2)=1-\ln(3)$ donc $\dfrac{w_n n}{1-\ln 3}=\dfrac{n}{n-w_n+o(1)-2}$ donc tend vers 1 si n tend vers $+\infty$ donc la suite (w_n) est équivalente à $\left(\dfrac{1-\ln 3}{n}\right)$.