Simulation DS N°4

Fonctions Réelles-Développements Limités

16 Janvier 2019

Durée : 4 heures

Question de Cours

1. Rappeler l'énoncé exact du théorème de Rolle ;
2. Rappeler l'énoncé exact du théorème des accroissements finis ;
3. Rappeler l'énoncé exact des inégalités des accroissements finis ;
4. Rappeler l'énoncé exact de la formule de Taylor avec reste intégrale ;
5. Rappeler l'énoncé exact de la formule de Taylor-Lagrange ;
6. Rappeler l'énoncé exact de la formule de Taylor-Young ;
7. Rappeler la définition de fonction convexe ;
8. Rappeler l'énoncé exact de l'inégalité de Jensen ;
9. Rappeler l'inégalité qui donne la position d'une courbe vis à vis de ses tangentes quand la fonction est convexe ;
10. Rappeler l'inégalité qui donne la position d'une courbe vis à vis de ses cordes quand la fonction est convexe ;

Exercices Application de Cours :

Exercice 1 : Fonctions Réelles

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos(\operatorname{th}(x)) + \arctan(\operatorname{sh}(x))$$

1. *Préciser le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions* th *et* sh ?
2. *Préciser le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions* arccos *et* arctan ?
3. *Préciser le domaine de définition et de dérivabilité de f ?*
4. *Quel formule permet de relier $\operatorname{th}^2 x$ et $\operatorname{ch}^2 x$?*
5. *Calculer la dérivée de f.*
6. *En déduire une expression simplifiée de f.*
7. *Résoudre l'équation*
$$\operatorname{th} x = \frac{5}{13}$$
On précisera la méthode employée.
8. *Montrer que*
$$\arccos\frac{5}{13} + \arctan\frac{5}{12} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 2 : Developpements Limités

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\cos x = nx$ possède une unique solution $x_n \in [0,1]$.
2. Déterminer la limite de (x_n).
3. Etudier la monotonie de (x_n).
4. Etablir que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
5. Déterminer un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$.

Exercice 3 : Developpements Limités

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]-1,1[$ par

$$f(x) = x + \ln(1+x).$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $f(x)$ au voisinage de 0.
2. Démontrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J qu'on explicitera.
3. En admettant qu'il existe, déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $f^{-1}(x)$ au voisinage de 0.

Exercice 4 : Developpements Limités

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Etudier les variations de f.
5. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.
6. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de f.
7. Préciser l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1. Préciser la position relative de T et $\mathcal{C}$ au voisinage du point d'abscisse 1.
8. Tracer $\mathcal{C}$ avec soin. On placera notamment la tangente T déterminée à la question précédente.

Exercice Facultatif :

1. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe, telle que $f(a)=f(b)=f(c)=0$ où $c\in]a,b[$. Montrer que $f=0$ sur $[a,b]$
2. En déduire que toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe qui rencontre l'une de ses cordes en trois points est affine.
3. Reprendre les mêmes questions, en supposant cette fois f convexe continue.

Problème de Synthèse

..

Fin