Corrigé DS N°4
Fonctions Réelles-Développements Limités

16 Janvier 2019

Exercices Application de Cours :

Exercice 1 : Fonctions Réelles

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos(\operatorname{th}(x)) + \arctan(\operatorname{sh}(x))$$

1. *Préciser le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions* th *et* sh ?

   Solution. *C'est du cours, elle sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.* ▪

2. *Préciser le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions* arccos *et* arctan ?

   Solution. *L'* arccos *est définie sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$. L'* arctan *est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.* ▪

3. *Préciser le domaine de définition et de dérivabilité de f ?*

   Solution. *La fonction* th *est à valeurs dans $]-1,1[$. Puisque la fonction* arccos *est définie et dérivable sur $]-1,1[$, on peut affirmer que $x \longrightarrow \arccos(\operatorname{th}(x))$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.*
   Les fonctions sh *et* arctan *sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, la composée $x \longrightarrow \arctan(\operatorname{sh}(x))$ l'est donc aussi.*
   En conclusion, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. ▪

4. *Quel formule permet de relier $\operatorname{th}^2 x$ et $\operatorname{ch}^2 x$?*

   Solution. *C'est du cours $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.* ▪

5. *Calculer la dérivée de f.*

   Solution. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(\operatorname{th} x)'}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}} + \frac{(\operatorname{sh} x)'}{1+\operatorname{sh}^2 x} \\ &= -\frac{1-\operatorname{th}^2 x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}} + \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x} \end{aligned}$$

   or $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$ *et* $\operatorname{ch} x \geq 0$, *d'où*

$$f'(x) = -\sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}} + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0$$

   ▪

6. *En déduire une expression simplifiée de f.*

   Solution. *La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}$ (car dérivable sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$ et de dérivée nulle). On a $f(0) = \arccos 0 + \arctan 0 = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi}{2}$$

   ▪

7. *Résoudre l'équation*

$$\operatorname{th} x = \frac{5}{13}$$

   On précisera la méthode employée.

   Solution. *Deux méthodes.*
   La première : la fonction th *est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. Puisque $\dfrac{5}{13} \in]-1,1[$,*

$$\operatorname{th} x = \frac{5}{13} \Longleftrightarrow x = \operatorname{arg\,th} \frac{5}{13}$$

La seconde : on a

$$\operatorname{th} x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{5}{13} \iff 13\left(e^{2x}-1\right) - 5\left(e^{2x}+1\right) = 8e^{2x} - 18 = 0$$

on en déduit que

$$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{18}{8}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{4} = \ln\sqrt{\frac{9}{4}} = \ln\frac{3}{2}$$

▪

8. *Montrer que*

$$\arccos\frac{5}{13} + \arctan\frac{5}{12} = \frac{\pi}{2}$$

Solution. *Suivant la méthode utilisée à la question 7. la rédaction est différente.*
Première méthode : on a

$$f\left(\operatorname{arg\,th}\frac{5}{13}\right) = \arccos\left(\operatorname{th}\left(\operatorname{arg\,th}\frac{5}{13}\right)\right) + \arctan\left(\operatorname{sh}\left(\operatorname{arg\,th}\frac{5}{13}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

or $\operatorname{th}\left(\operatorname{arg\,th}\frac{5}{13}\right) = \frac{5}{13}$ *et* $\operatorname{sh}(\operatorname{arg\,th} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
en effet

$$\operatorname{th}\operatorname{arg\,th} x = x$$

$$\operatorname{ch}^2\operatorname{arg\,th} x = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2\operatorname{arg\,th} x} = \frac{1}{1-x^2} \Longrightarrow |\operatorname{ch}\operatorname{arg\,th} x| = \operatorname{ch}\operatorname{arg\,th} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\textit{et pour finir, } \operatorname{sh} = \operatorname{th}\times\operatorname{ch}$$

ainsi

$$\operatorname{sh}\left(\operatorname{arg\,th}\frac{5}{13}\right) = \frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}} = \frac{5}{12}$$

Seconde méthode :
On sait que

$$\operatorname{th}\left(\ln\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{13}$$

donc

$$\begin{aligned} f\left(\ln\frac{3}{2}\right) &= \arccos\left(\operatorname{th}\left(\ln\frac{3}{2}\right)\right) + \arctan\left(\operatorname{sh}\left(\ln\frac{3}{2}\right)\right) \\ &= \arccos\frac{5}{13} + \arctan\frac{e^{\ln\frac{3}{2}} - e^{-\ln\frac{3}{2}}}{2} \\ &= \arccos\frac{5}{13} + \arctan\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{2} \\ &= \arccos\frac{5}{13} + \arctan\frac{5}{12} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercice 2 : Developpements Limités

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $f_n : x \mapsto \cos x - nx$. f_n est dérivable et $f_n'(x) = -\sin x - n < 0$ pour tout $x \in [0,1]$. f_n est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus, $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = \cos(1) - n < 0$. On en déduit que f_n s'annule une unique fois sur $[0,1]$. D'où l'existence et l'unicité de x_n.
2. On a $\cos x_n = nx_n$ et donc $x_n = \frac{\cos x_n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $|x_n| \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis que (x_n) converge vers 0.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $f_n \geqslant f_{n+1}$ sur $[0,1]$. Donc $f_n(x_{n+1}) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n)$. La stricte décroissance de f_n implique que $x_{n+1} \leqslant x_n$. Par conséquent la suite (x_n) est décroissante.
4. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que cos est continue en 0, $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos 0 = 1$. Donc $x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
5. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)$. Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi $x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. On en déduit que $x_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^3}$.

Exercice 3 : Developpements Limités

1. $$x + \ln(1+x) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$
2. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I (comme somme de fonctions continues et strictement croissantes). D'après le théorème d'inversion, la fonction f réalise une bijection de I sur l'intervalle
$$J = \left]f(-1^+), f(1^-)\right[=]-\infty, 1 + \ln 2[.$$
3. Admettons que
$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$$
pour des réels a_k convenables. Comme $f(0) = 0$, alors $f^{-1}(0) = 0$ et, par continuité de f^{-1}, on sait déjà que $a_0 = 0$. Comme $f^{-1}(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on peut prendre
$$u = f^{-1}(x) = \mathcal{O}(x)$$
dans le développement limité
$$f(u) = 2u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$
Or
$$u^2 = a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + o(x^3)$$
$$u^3 = a_1^3 x^3 + o(x^3)$$

donc

$$\begin{aligned} f\left(f^{-1}(x)\right) &= 2a_1x + \frac{(4a_2 - a_1^2)}{2}x^2 + \frac{(6a_3 - 3a_1a_2 + a_1^3)}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x \qquad (\forall\, x \in J) \\ &= x + o(x^3). \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\begin{cases} 2a_1 & = 1 \\ -a_1^2 + 4a_2 & = 0 \\ a_1^3 - 3a_1a_2 + 6a_3 & = 0 \end{cases}$$

donc

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{16},\ a_3 = \frac{-1}{192}.$$

> **Remarque.** f^{-1} admet un développement limité d'ordre 3 en 0 car elle est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $f(I)$. En effet, c'est la bijection réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, à savoir f, dont la dérivée ne s'annule pas sur I puisque pour tout $x \in I$,
>
> $$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 0$$

Exercice 4 : Developpements Limités

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x}$. Or $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Par conséquent f est bien continue en 0.
2. Etudions le taux de variation de f en 0 : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x > 0$:

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right)f(x) = \frac{f(x)}{x^2}(x + 1 - \ln x)$$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $g(x) = x + 1 - \ln x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. g est donc décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$. Comme $g(1) = 2 > 0$, on en déduit que g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

5. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{}{x}\ \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f\ x \quad\quad \infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\overline{\ \ x}} = 1$. Pour $x>0$, $f\ x \quad x = x\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)$. Or $e^{\frac{\ln x}{x}}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$. Donc $f(x)-x \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = +\infty$. $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$.

6. Posons $x=1+h$, de sorte que $f(x)=f(1+h)=e^{\left(1+\frac{1}{1+h}\right)\ln(1+h)}$. On a d'une part :

$$1+\frac{1}{1+h} \underset{h\to0}{=} 2-h+h^2+o(h^2)$$

et d'autre part :

$$\ln(1+h) \underset{h\to0}{=} h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3) \underset{h\to0}{=} h\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)\right)$$

De sorte que,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{1+h}\right)\ln(1+h) &\underset{h\to0}{=} h\left(2-2h+\frac{13}{6}h^2+o(h^2)\right)\\ &\underset{h\to0}{=} 2h-2h^2+\frac{13}{6}h^3+o(h^3)\end{aligned}$$

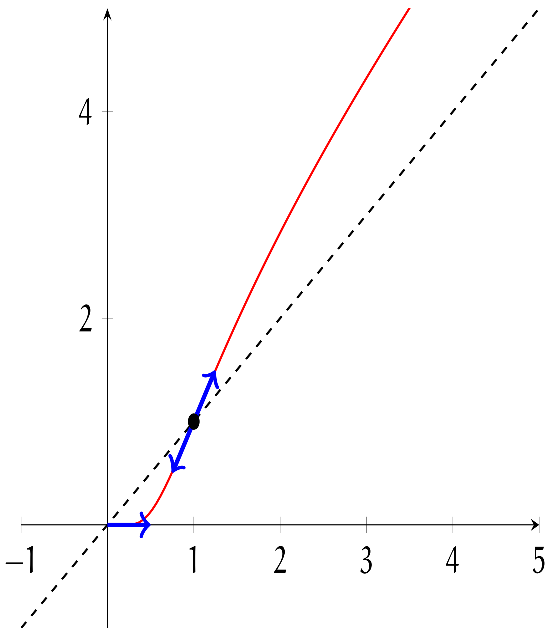
Posons $u=2h-2h^2+\frac{13}{6}h^3+o(h^3)$. On a $u\underset{h\to0}{\longrightarrow}0$ et $e^u \underset{u\to0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3)$. On trouve $u^2 \underset{h\to0}{=} 4h^2-8h^3+o(h^3)$ et $u^3 \underset{h\to0}{=} 8h^3+o(h^3)$. Il vient finalement :

$$f(1+h) \underset{h\to0}{=} 1+2h-\frac{1}{2}h^3+o(h^3)$$

c'est-à-dire :

$$f(x) \underset{x\to1}{=} 1+2(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^3+o((x-1)^3)$$

7. On déduit de la question précédente que $\mathcal{C}$ admet au point d'abscisse 1 une tangente d'équation $y=1+2(x-1)$ i.e. $y=2x-1$. On déduit la position relative de $\mathcal{C}$ et T du signe de $-\frac{1}{2}(x-1)^3$. Au voisinage de 1^-, $\mathcal{C}$ est au-dessus de T et au voisinage de 1^+, $\mathcal{C}$ est au-dessous de T.



8.

Problème de Synthèse

Partie I :

1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_x^y e^t\,dt = 1 \Leftrightarrow e^y - e^x = 1 \Leftrightarrow e^y = 1 + e^x \Leftrightarrow y = \ln(1+e^x) \text{ (pour tout réel } x, \text{ on a } e^x > 0).$$

2) La fonction $x \mapsto 1 + e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) - x = \ln(1+e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln(1+e^{-x}).$$

Donc d'une part $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$ ce qui montre que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et d'autre part, pour tout réel x, $f(x) - x > 0$ ce qui montre que la courbe $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de la droite $\mathcal{D}$ sur $\mathbb{R}$.

4) Quand x tend vers 0,

$$f(x) = \ln(1+1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) = \ln(2) + \ln(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)) = \ln(2) + \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)$$
$$= \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

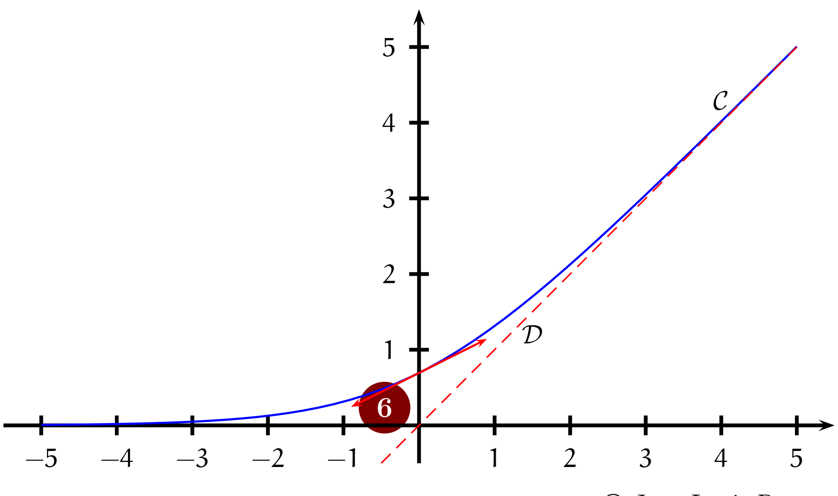
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).}$$

En particulier, f admet en 0 un développement limité d'ordre 1 : $f(x) = \ln(2) + \dfrac{x}{2} + o(x)$. Donc

$$\boxed{\text{une équation de la tangente à } \mathcal{C} \text{ au point d'abscisse } 0 \text{ est } y = \ln(2) + \frac{x}{2}.}$$

De plus, quand x tend vers 0, $f(x) - (\ln(2) + \dfrac{x}{2}) = \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$. Cette différence est localement du signe de $\dfrac{x^2}{8}$ c'est-à-dire positive. La courbe $\mathcal{C}$ est donc localement au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

5) Représentation graphique de f.



Partie II :

1) **a)** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_x^y \varphi(t)\, dt = \int_x^y \frac{1}{\pi(1+t^2)}\, dt = \frac{1}{\pi}(\operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} x) < \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1.$$

Donc

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \int_x^y \varphi(t)\, dt < 1.}$$

b) En particulier $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \int_x^y \varphi(t)\, dt \neq 1$ et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (E_x) \text{ n'a pas de solution.}}$$

c) Dans cet exemple $\ell = 0$.

2) Pour x réel donné, l'équation (E_x) s'écrit encore $\Phi_x(y) = 1$.

3) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction Φ_x est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier continue sur $\mathbb{R}$, et de plus $\Phi_x' = \varphi$.

Puisque φ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, Φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_x \text{ est continue et strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Φ_x réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{-\infty} \Phi_x, \lim\limits_{+\infty} \Phi_x[$.

b) Si $\ell = +\infty$, il existe un réel t_0 tel que, pour $t \geq t_0$, $\varphi(t) > 1$. Dans ce cas, $A = 1$ convient.

Si $\ell \in]0, +\infty[$, il existe un réel t_0 tel que, pour $t \geq t_0$, $\varphi(t) > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$. Dans ce cas, $A = \frac{\ell}{2}$ convient.

On a montré dans tous les cas que

$$\boxed{\exists t_0 \in \mathbb{R},\ \exists A > 0 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ (t \geq t_0 \Rightarrow \varphi(t) \geq A).}$$

c) Soit x un réel. Pour tout réel u supérieur ou égal à t_0, on a

$$\Phi_x(u) = \int_x^{t_0} \varphi(t)\, dt + \int_{t_0}^u \varphi(t)\, dt \geq \int_x^{t_0} \varphi(t)\, dt + A(u - t_0).$$

Comme $A > 0$, on en déduit que $\lim u{+}\infty \Phi_x(u) = +\infty$ et en particulier, il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi_x(u) > 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exists u \in \mathbb{R} /\ \Phi_x(u) > 1.}$$

d) Soient $x \in \mathbb{R}$ puis u un réel tel que $\Phi_x(u) > 1$. Puisque Φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, l'équation (E_x) admet au plus une solution. Puisque Φ_x est continue sur $\mathbb{R}$, que $\Phi_x(x) = 0 < 1$ et que $\Phi_x(u) > 1$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation (E_x) a au moins une solution. Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{l'équation } (E_x) \text{ a une solution et une seule dans } \mathbb{R}.}$$

Partie III :

1) On a vu à la question 3)a) que la fonction Φ_0 réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{-\infty}\Phi_0, \lim\limits_{+\infty}\Phi_0[=]\lim\limits_{-\infty}\Phi_0, +\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \text{ solution de } (E_x) \Leftrightarrow \int_x^{f(x)} \varphi(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow \int_0^{f(x)} \varphi(t)\,dt - \int_0^x \varphi(t)\,dt = 1$$
$$\Leftrightarrow \Phi_0(f(x)) = \Phi_0(x) + 1 \Leftrightarrow f(x) = \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x)+1).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x)+1).}$$

2) D'après la question 3)a), la fonction Φ_0 est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction Φ_0^{-1} est continue et strictement croissante sur $\Phi_0(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty}\Phi_0, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto \Phi_0(x)+1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]\lim\limits_{-\infty}\Phi_0, +\infty[$ et la fonction $y \mapsto \Phi_0^{-1}(y)$ est continue et strictement croissante sur $]\lim\limits_{-\infty}\Phi_0, +\infty[$. Donc la fonction $x \mapsto \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x)+1)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ est continue et strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

3) **a)** φ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc Φ_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\Phi_0' = \varphi$.
Φ_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\Phi_0' = \varphi$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc Φ_0^{-1} est de classe C^1 sur $\Phi_0(\mathbb{R})$ et

$$(\Phi_0^{-1})' = \frac{1}{\Phi_0' \circ \Phi_0^{-1}}.$$

Mais alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = (\Phi_0 + 1)'(x) \times \frac{1}{\Phi_0'(\Phi_0^{-1}(\Phi_0(x)+1))} = \frac{\Phi_0'(x)}{\Phi_0'(\Phi_0^{-1}(\Phi_0(x)+1))} = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}.$$

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout réel } x,\ f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}.}$$

b) La fonction f est toujours continue sur $\mathbb{R}$.
Notons V le voisinage de $f(x_0)$ considéré dans l'énoncé. Puisque f est continue en x_0, il existe un voisinage U de x_0 tel que si x est dans U, $f(x)$ est dans V.
Le travail précédent reste presque entièrement valable : f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur U privé de x_0 et pour x dans U et différent de x_0, on a $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}$.
φ est continue en x_0 et donc, quand x tend vers x_0, $\varphi(x)$ tend vers $\varphi(x_0) > 0$. D'autre part, $\varphi(f(x))$ tend vers $\varphi(f(x_0)) = 0$ en restant strictement positif. On en déduit que

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty.$$

D'après un théorème classique d'analyse, on peut affirmer que f n'est pas dérivable en x_0 mais que la courbe représentative de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à la droite (Oy).

4) Soit $\varepsilon > 0$.

a) Puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$, il existe un réel a tel que, pour $t \geq a$, on a $\varphi(t) \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$.

b) Notons tout d'abord que, pour x réel donné, puisque $\int_x^{f(x)} \varphi(t)\,dt = 1 > 0$ et que φ est positive, on a nécessairement $f(x) \geq x$ (si $f(x) < x$, alors $\displaystyle\int_x^{f(x)} \varphi(t)\,dt \leq 0$).

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq x.}$$

Soit alors x un réel supérieur ou égal à a. On a ainsi $a \leq x \leq f(x)$ et donc

$$1 = \int_x^{f(x)} \varphi(t)\,dt \geq \int_x^{f(x)} \frac{1}{\varepsilon}\,dt = \frac{1}{\varepsilon}(f(x)-x) = \frac{1}{\varepsilon}|f(x)-x|,$$

et donc

$$|f(x)-x)| \leq \varepsilon.$$

On a ainsi montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R}/\ (\forall x \in \mathbb{R})\ (x \geq a \Rightarrow |f(x)-x| \leq \varepsilon),$$

et donc que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0.}$$

Ceci montre que

$$\boxed{\text{la droite d'équation } y = x \text{ est asymptote à la courbe représentative de } f \text{ en } +\infty.}$$

5) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque les expressions $\dfrac{1}{\ell+u}$ et $\dfrac{1}{\ell-u}$ tendent vers $\dfrac{1}{\ell}$ quand u tend vers 0, on peut trouver un réel ε' strictement positif et strictement plus petit que ℓ tel que

$$\frac{1}{\ell} - \varepsilon < \frac{1}{\ell+\varepsilon'} < \frac{1}{\ell-\varepsilon'} < \frac{1}{\ell} + \varepsilon.$$

Puisque φ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$, il existe un réel a tel que, pour $t \geq a$, on a $\ell - \varepsilon' \leq \varphi(t) \leq \ell + \varepsilon'$.

Soit x un réel supérieur ou égal à a. Puisque $f(x) \geq x$, on a

$$(f(x)-x)(\ell-\varepsilon') = \int_x^{f(x)} (\ell-\varepsilon')\,dt \leq \int_x^{f(x)} \varphi(t)\,dt = 1 \leq \int_x^{f(x)} (\ell+\varepsilon')\,dt = (f(x)-x)(\ell+\varepsilon'),$$

et donc

$$\frac{1}{\ell+\varepsilon'} \leq f(x) - x \leq \frac{1}{\ell-\varepsilon'} \text{ (puisque } \ell - \varepsilon' > 0).$$

Par définition de ε', on a encore

$$\frac{1}{\ell} - \varepsilon < f(x) - x < \frac{1}{\ell} + \varepsilon.$$

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R}/\ (\forall x \in \mathbb{R}),\ (x \geq a \Rightarrow \frac{1}{\ell} - \varepsilon < f(x) - x < \frac{1}{\ell} + \varepsilon),$$

et donc que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \frac{1}{\ell}.}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la droite d'équation } y = x + \frac{1}{\ell} \text{ est asymptote à la courbe représentative de } f \text{ en } +\infty.}$$

6) **a)** Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. $(x,y)\in\Gamma \Leftrightarrow \displaystyle\int_x^y \varphi(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow \int_{-x}^{-y}\varphi(-u)\,(-du)=1$ (en posant $u=-t$)

$$\Leftrightarrow \int_{-y}^{-x}\varphi(u)\,du = 1 \text{ (car } \varphi \text{ est paire)}$$

$$\Leftrightarrow (-y,-x)\in\Gamma.$$

Donc $\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ ((x,y)\in\Gamma \Leftrightarrow (-y,-x)\in\Gamma).}$

b) On en déduit que $\boxed{\text{la droite d'équation } y=-x \text{ est axe de symétrie de } \Gamma.}$

Partie IV :

1) Pour tout réel x, $\varphi(x)=(x^2-1)^2$. φ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement positive sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et s'annule en -1 et 1. Enfin $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$. La fonction φ vérifie donc les hypothèses du problème.

2) • Puisque φ est continue sur $\mathbb{R}$, est strictement positive sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et s'annule en -1 et 1, la question III.2) montre que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$, la question III.4)b) montre que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et que la droite d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

• Puisque φ est paire, la question III.6) montre que la droite d'équation $y=-x$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

• Par symétrie par rapport à la droite d'équation $y=-x$, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et la droite d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

• Il existe un réel x_0 et un seul tel que $f(x_0)=1$. Comme $\int_0^1(t^2-1)^2\,dt=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{3}+1=1-\dfrac{7}{15}<1$, on a $x_0<0$ et comme $\int_0^1(t^2-1)^2\,dt=2(1-\dfrac{7}{15})=\dfrac{16}{15}>1$, on a $x_0>-1$. On trouve encore $\int_{-0,6}^1(t^2-1)^2\,dt=1,004...>1$ et $\int_{-0,5}^1(t^2-1)^2\,dt=0,9...<1$ Donc

$$-0,6<x_0<-0,5.$$

De même, Il existe un réel x_1 et un seul tel que $f(x_1)=-1$. Comme $\int_{-1,8}^{-1}(t^2-1)^2\,dt=1,3...>1$ et $\int_{-1,7}^{-1}(t^2-1)^2\,dt=0,7...<1$, on a

$$-1,8<x_1<-1,7.$$

D'après la question III.3)b), $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à (Oy) aux points $(x_1,-1)$ et $(x_0,1)$.

• φ s'annule en -1 et 1 et d'après la question III.3)a), $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à (Ox) aux points $(-1,f(-1))$ et $(1,f(1))$, ces points étant bien sûr les symétriques des points précédents par rapport à la droite d'équation $y=-x$.