

Devoir Surveillé N° 4

Structures-Arithmétique

13 Février 2019

Durée 4 heures



Question de Cours

- 1 Rappeler la propriété caractéristique d'un sous groupe
- 2 Rappeler la propriété caractéristique d'un sous anneau
- 3 Rappeler la propriété caractéristique d'un sous corps
- 4 Rappeler la propriété caractéristique d'un sous espace vectoriel
- 5 Rappeler la propriété caractéristique d'une sous algèbre
- 6 Rappeler l'énoncé du théorème de Bezout et celui de Gauss
- 7 Compléter le vide : $a \wedge b = a \wedge c = 1 \Rightarrow a \dots$
- 8 Compléter le vide : $a \wedge b = 1, a, b$ divisent $c \Rightarrow ab \dots$
- 9 Compléter le vide : $(a \wedge b).(a \vee b) = \dots$



Exercices Application de Cours :

Exercice 1 : Structures Algébriques

1. On munit \mathbb{R} de la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$.

Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre,

2. On munit \mathbb{R}^{+*} de la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Montrer que $*$ est commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de \mathbb{R}^{+*} n'a de symétrique pour $*$.

3. On munit \mathbb{R} de la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

Montrer que l'application $x \mapsto x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$. En déduire que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2 : Arithmétique La suite de Fibonacci et le nombre d'or

En 1202, Leonardo Fibonacci introduit la suite, que nous allons étudier dans ce problème, pour décrire la croissance d'une population de lapins. Cette suite est fortement liée au nombre d'or. Le nombre d'or apparaît en phyllotaxie, une branche de la botanique qui étudie l'ordre dans lequel sont implantées les feuilles le long de la tige d'une plante ou l'agencement des fleurons et des écailles dans divers fruits et fleurs. Plus récemment, on trouve aussi le nombre d'or jouant un rôle crucial dans les travaux de physiciens concernant les quasicristaux ou même en cardiologie ! Le nombre d'or a nourri les analyses d'auteurs intéressés par l'art, l'architecture ou les proportions du corps humain. En guise d'introduction, vous pouvez regarder la courte vidéo "La nature par les nombres" disponible sur YouTube.

A-Préliminaires

La suite de Fibonacci, notée (F_n) , est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

- Démontrer l'identité de Cassini² : $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$.

B-Les nombres de Fibonacci et l'arctangente.

- En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

On pourra commencer par démontrer que les deux quantités mises en jeu ont la même tangente.

- En déduire les formules suivantes :

$$(a) \frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right).$$

$$(b) \frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right).$$

$$(c) \frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{13}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{21}\right).$$

C-Arithmétique des nombres de Fibonacci

- En analysant l'identité de Cassini, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
- Démontrer que : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}$.
 - En déduire que : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \operatorname{pgcd}(F_{n+p}, F_n) = \operatorname{pgcd}(F_p, F_n)$.
 - En déduire que : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \operatorname{pgcd}(F_{qn+p}, F_n) = \operatorname{pgcd}(F_p, F_n)$
 - Démontrer finalement que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \operatorname{pgcd}(F_m, F_n) = F_{\operatorname{pgcd}(m, n)}$.
- Démontrer que pour tout $n \geq 3$ et pour tout entier naturel m : $F_n | F_m \Leftrightarrow n | m$.
- Soit $m \geq 5$, démontrer que si F_m est un nombre premier alors m est un nombre premier. Trouver un contre-exemple non trivial à la réciproque.

On ignore actuellement si la suite de Fibonacci contient une infinité de nombres premiers.

Exercice 3 (Facultatif) : Arithmétique

D-Théorème de Zeckendorf

Le but de cette partie est de démontrer le théorème de Zeckendorf³ qui affirme que tout entier naturel non nul s'écrit de façon unique comme somme de nombres de Fibonacci non consécutifs.

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on notera $a \gg b$ pour exprimer que $a \geq b + 2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que n possède une décomposition de Zeckendorf si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et des entiers naturels $(k_i)_{1 \leq i \leq p}$ tels que :

$$n = \sum_{i=1}^p F_{k_i} \text{ et } k_1 \gg k_2 \gg \dots \gg k_p \gg 0 \quad (\star)$$

- (a) Donner une décomposition de Zeckendorf pour les entiers de 1 à 13.
 (b) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $\{k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \text{ et } F_k \leq n\}$ admet un maximum, que l'on note k_1 .
 (c) Démontrer par récurrence forte que tout entier naturel non nul possède une décomposition de Zeckendorf.
2. On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ possède une décomposition de Zeckendorf de la forme (\star) . Démontrer que k_1 est unique, on pourra utiliser les formules 2.(b) et 2.(c) de la partie A.
3. En déduire le théorème annoncé.
4. Épatez vos proches ! Vous distribuez 8 cartes numérotées contenant des entiers de 1 à 54.

Carte 1 : 1,4,6,9,12,14,17,19,22,25,27,30,33,35,38,40,43,46,48,51,53

Carte 2 : 2,7,10,15,20,23,28,31,36,41,44,49,54

Carte 3 : 3,4,11,12,16,17,24,25,32,33,37,38,45,46,50,51

Carte 4 : 5,6,7,18,19,20,26,27,28,39,40,41,52,53,54

Carte 5 : 8,9,10,11,12,29,30,31,32,33,42,43,44,45,46


Carte 6 : 13,14,15,16,17,18,19,20,47,48,49,50,51,52,53,54

Carte 7 : 21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33

Carte 8 : 34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54

Vous demandez à une personne de choisir au hasard un entier entre 1 et 54. Vous lui demandez ensuite sur quelles cartes apparaît le numéro choisi, puis vous devinez presque instantanément le numéro choisi. Comment faites-vous ?

3. Edouard Zeckendorf (1901-1983), médecin, officier de l'armée et mathématicien belge.

 Problème de Synthèse I (Structures Algébriques)

Problème : Endomorphismes de $(\mathbb{R}, +)$

Le but de ce problème est d'étudier l'ensemble des morphismes de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. C'est-à-dire l'ensemble des fonctions f définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et qui vérifient l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (\star)$$

1. Démontrer que les fonctions linéaires vérifient la relation (\star) .

Le but de ce qui suit est de démontrer que, sous certaines hypothèses, les fonctions linéaires sont les seules qui vérifient (\star) .

2. **Cas f dérivable.** Dans cette question, on suppose que f est dérivable sur \mathbb{R} et vérifie (\star) . On fixe $y \in \mathbb{R}$ et on pose :

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x + y) - f(x) \end{aligned}$$

- (a) Démontrer que g est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0$.
 (b) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f'(y) = a$.
 (c) Démontrer que f est une fonction linéaire.
3. **Cas f continue.** Dans cette question, on suppose que f est continue sur \mathbb{R} et vérifie (\star) .
- (a) Démontrer que $f(0) = 0$.
 (b) On pose $a = f(1)$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$.
 (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = an$.
 (d) Démontrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(qx) = qf(x)$. En déduire que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$.
On remarque que le résultat de la question précédente est valable dès que la fonction f vérifie (\star) , sans utiliser l'hypothèse de continuité, on pourra utiliser ce résultat dans la question 4.
 (e) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels qui tend vers x . En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

4. **Cas f croissante.** Dans cette question, on suppose que f est croissante sur \mathbb{R} et vérifie (\star) . Soit $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ et $v_n = \frac{E(10^n x) + 1}{10^n}$.
- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(10^{n+1}x) - 10E(10^n x) \in [0, 9]$.
 - En déduire que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.
 - Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
 - Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq x \leq v_n$.
 - En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers x .
- (b) On note $a = f(1)$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $au_n \leq f(x) \leq av_n$.
 (c) En déduire que f est linéaire.
 (d) Conclure en faisant la synthèse.

 Problème de Synthèse II (Arithmétique)

Partie I

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(1,0)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note \mathcal{D}_t la droite de coefficient directeur t et qui passe par A . On note \mathcal{C} le cercle de centre l'origine et de rayon 1.

- Q1)** Donner une équation de \mathcal{D}_t .
- Q2)** Montrer que la droite \mathcal{D}_t rencontre le cercle \mathcal{C} en un point $M(x(t), y(t))$ différent de A . Préciser $x(t)$ et $y(t)$.
- Q3)** Montrer que t est rationnel si et seulement si $x(t)$ et $y(t)$ sont rationnels.
- Q4)** Montrer que l'on réalise ainsi une bijection entre \mathbb{Q} et $\{M(x, y) \in \mathcal{C} \setminus \{A\} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$.
- Q5)** Dédurre de ce qui précède, que les points de \mathcal{C} dont les deux coordonnées sont rationnelles, sont les points $M(x, y)$ avec :

$$\begin{cases} x = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \\ y = \frac{2pq}{p^2 + q^2} \end{cases} \text{ avec } p, q \in \mathbb{Z}, \text{ premiers entre eux.}$$

Partie II

Dans cette partie on considère l'équation $a^2 + b^2 = c^2$ d'inconnues $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec a, b, c non nuls.

- Q1)** Donner une solution simple de cette équation (avec a, b, c non nuls). Dans la suite (a, b, c) désigne une solution de l'équation avec a, b, c non nuls.
- Q2)** Soit $d = \text{PGCD}(a, b)$, montrer que $d = \text{PGCD}(a, c) = \text{PGCD}(b, c)$. Dans la suite, on pose $a = da', b = db'$ et $c = dc'$ avec a', b', c' premiers entre eux deux à deux.
- Q3)** Justifier l'existence de deux entiers p et q premiers entre eux tels que :

$$\frac{a'}{c'} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \text{ et } \frac{b'}{c'} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$$

- Q4)** En déduire qu'il existe un entier k tel que :

$$\begin{cases} p^2 - q^2 = ka' \\ 2pq = kb' \\ p^2 + q^2 = kc' \end{cases}$$

- Q5)** a) Montrer que $|k| = \text{PGCD}(p^2 + q^2, 2pq) = \text{PGCD}(p^2 + q^2, 2)$.
- b) En déduire que si p et q sont de parité différente, alors $|k| = 1$. Donner alors l'expression de a, b et c .
- c) Montrer que si p et q sont impairs, alors $|k| = 2$. Soient $u = \frac{p+q}{2}$ et $v = \frac{p-q}{2}$, montrer que u et v sont premiers entre eux. Exprimer a', b' et c' en fonction de u et v . En déduire a, b et c .
- d) Conclure.

Corrigé

Exercices Application de Cours :

1. Démontrons la propriété annoncée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{H}_n : F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$$

• **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a bien : $F_1^2 - F_0 F_2 = 1 = (-1)^0$.

• **Hérédité.** Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons \mathcal{H}_n vraie, on a :

$$F_{n+2}^2 - F_{n+1} F_{n+3} = F_{n+2}^2 - F_{n+1} (F_{n+1} + F_{n+2}) = F_{n+2} (F_{n+2} - F_{n+1}) - F_{n+1}^2 = F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Ce qui démontre que \mathcal{H}_{n+1} est vérifiée et termine la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$$

2. Soit $n \geq 1$: cette condition va permettre de garantir que les dénominateurs mis en jeu ne sont pas nuls puisque $F_n > 0$ dès que $n \geq 1$.

• Étant donné que $n \geq 1$, on a : $0 \leq \frac{1}{F_{2n}} \leq 1$. Par croissance de la fonction Arctan, cela permet d'affirmer que $0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) \leq \frac{\pi}{4}$.

On a également : $0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) < 1$ et $0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) < 1$, toujours en utilisant la stricte croissance de la fonction Arctan, on en déduit que :

$$0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Les deux nombres $\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)$ et $\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$ sont compris dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; pour démontrer qu'ils sont égaux, il suffit de démontrer qu'ils ont la même tangente.

• D'une part :

$$\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)\right) = \frac{1}{F_{2n}}$$

D'autre part :

$$\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right) = \frac{\frac{1}{F_{2n+1}} + \frac{1}{F_{2n+2}}}{1 - \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+2}}} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n+2}}{F_{2n+2}F_{2n+1} - 1}$$

On peut simplifier cette expression puisqu'elle est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{(F_{2n+1} + F_{2n+2})F_{2n}}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} &= \frac{F_{2n+1}F_n + F_{2n+2}F_{2n}}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} \\ &= \frac{F_{2n+1}F_n + F_{2n+1}^2 - (-1)^{2n}}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} && \text{en utilisant l'identité de Cassini} \\ &= \frac{F_{2n+1}(F_n + F_{2n+1}) - 1}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} \\ &= \frac{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} \\ &= \frac{1}{F_{2n}} \end{aligned}$$

Ce qui démontre bien la formule attendue :

$$\forall n \geq 1, \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

3. (a) En appliquant la formule précédente avec $n = 1$, il vient :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_2}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_3}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_4}\right) \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$$

Ce qui démontre que :

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) \quad (1)$$

(b) En utilisant la formule précédente avec $n = 2$, il vient :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_4}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_6}\right) \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$$

En remplaçant dans l'égalité (1), il vient :

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) \quad (2)$$

(c) De même, en appliquant la formule précédente pour $n = 3$, on obtient :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{13}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{21}\right)$$

En remplaçant dans l'égalité (2), il vient :

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{13}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{21}\right)$$

Vous aurez compris comment poursuivre la généralisation de ces formules. Elles peuvent être utilisées pour le calcul de décimales de π .

C-Arithmétique des nombres de Fibonacci

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 1. de la partie B, l'identité de Cassini s'écrit : $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$. Soit $p \in \mathbb{Z}$, un diviseur commun de F_{n+1} et F_n alors p divise toute combinaison de F_{n+1} et F_n . En particulier p divise $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$. Ce qui démontre que les seuls diviseurs communs de F_{n+1} et F_n sont -1 et 1 .

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \text{ et } F_n \text{ sont premiers entre eux}$$

2. (a) Démontrons la formule annoncée par récurrence double sur $p \in \mathbb{N}$. On note :

$$\mathcal{H}_p : \forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_n F_{p+1}$$

• **Initialisation.** Pour $p = 0$, on a $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ ainsi la formule annoncée se résume à : $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = F_n$. Pour $p = 1$, on a : $F_1 = 1$ et $F_2 = 1$ ainsi la formule annoncée devient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$. Ce qui est vrai par définition de la suite de Fibonacci.

• **Hérédité.** On suppose \mathcal{H}_p et \mathcal{H}_{p+1} vraies pour un entier naturel p fixé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} F_{n+p+2} &= F_{n+p+1} + F_{n+p} \quad \text{par définition de la suite de Fibonacci} \\ &= (F_{n-1}F_{p+1} + F_n F_{p+2}) + (F_{n-1}F_p + F_n F_{p+1}) \quad \text{en utilisant } \mathcal{H}_{p+1} \text{ et } \mathcal{H}_p \\ &= F_{n-1}(F_{p+1} + F_p) + F_n(F_{p+2} + F_{p+1}) \\ &= F_{n-1}F_{p+2} + F_n F_{p+3} \end{aligned}$$

Nous avons démontré \mathcal{H}_{p+2} et cela termine la récurrence.

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_n F_{p+1}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, nous allons démontrer que les couples (F_p, F_n) et (F_{n+p}, F_n) ont les mêmes diviseurs communs ainsi ils auront bien le même pgcd.

- Soit $d \in \mathbb{Z}$, si $d|F_p$ et $d|F_n$ alors $d|(F_{n-1}F_p + F_n F_{p+1}) = F_{n+p}$ (d'après la question précédente). Ce qui démontre que $d|F_n$ et $d|F_{n+p}$.
- Soit $d \in \mathbb{Z}$, si $d|F_{n+p}$ et $d|F_n$ alors $d|(F_{n+p} - F_n F_{p+1}) = F_{n-1}F_p$. Or F_n et F_{n-1} sont premiers entre eux d'après la question 1., par hypothèse $d|F_n$ donc d est premier avec F_{n-1} . D'après le théorème de Gauss : $d|F_{n-1}F_p$ et d premier avec F_{n-1} implique $d|F_p$. Finalement $d|F_n$ et $d|F_p$.

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \text{pgcd}(F_{n+p}, F_n) = \text{pgcd}(F_n, F_p)$$

- (c) Démontrons par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_q : \text{pgcd}(F_{qn+p}, F_n) = \text{pgcd}(F_p, F_n)$$

- **Initialisation.** Pour $q = 0$, la formule est évidente.
- **Hérédité.** On fixe $q \in \mathbb{N}$, on suppose que \mathcal{H}_q est vraie :

$$\text{pgcd}(F_{(q+1)n+p}, F_n) = \underbrace{\text{pgcd}(F_{qn+p+n}, F_n)}_{\text{question précédente}} = \text{pgcd}(F_{qn+p}, F_n) = \text{pgcd}(F_p, F_n)$$

Ce qui démontre que \mathcal{H}_{q+1} est vraie et achève la récurrence.

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \text{pgcd}(F_{qn+p}, F_n) = \text{pgcd}(F_p, F_n)$$

- (d) Soient m et n deux entiers naturels. Suivons les notations de l'algorithme d'Euclide et posons : $r_0 = m$, $r_1 = n$ et r_i le reste de la division euclidienne de r_{i-2} par r_{i-1} . On sait que cet algorithme se termine dans le sens où il existe un plus petit entier naturel $N \in \mathbb{N}$ tel que $r_N = 0$ et que $\text{pgcd}(m, n) = r_{N-1}$.
Démontrons par récurrence sur $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$:

$$\mathcal{H}_i : \text{pgcd}(F_{r_0}, F_{r_1}) = \text{pgcd}(F_{r_i}, F_{r_{i+1}})$$

• **Initialisation.** Pour $i = 0$, la formule est évidente.

• **Hérédité.** On fixe $i \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket$ et on suppose que \mathcal{H}_i est vraie. Effectuons la division euclidienne de r_i par r_{i+1} , on a :

$$\exists q \in \mathbb{N}, r_i = qr_{i+1} + r_{i+2}$$

Ainsi :

$$\text{pgcd}(F_{r_0}, F_{r_1}) = \text{pgcd}(F_{r_i}, F_{r_{i+1}}) = \underbrace{\text{pgcd}(F_{qr_{i+1}+r_{i+2}}, F_{r_{i+1}})}_{\text{question précédente}} = \text{pgcd}(F_{r_{i+2}}, F_{r_{i+1}})$$

Ce qui démontre que \mathcal{H}_{i+1} est vraie et termine la récurrence.

En particulier, \mathcal{H}_N est vérifiée donc :

$$\text{pgcd}(F_m, F_n) = \text{pgcd}(F_{r_0}, F_{r_1}) = \text{pgcd}(F_{r_{N-1}}, F_{r_N}) = \text{pgcd}(F_{r_{N-1}}, F_0) = \text{pgcd}(F_{r_{N-1}}, 0) = F_{r_{N-1}} = F_{\text{pgcd}(m,n)}$$

$$\boxed{\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \text{pgcd}(F_m, F_n) = F_{\text{pgcd}(m,n)}}$$

3. Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} n|m &\Leftrightarrow \text{pgcd}(m, n) = n \\ &\Leftrightarrow \text{pgcd}(F_m, F_n) = F_n \quad (\star) \\ &\Leftrightarrow F_n | F_m \end{aligned}$$

L'équivalence (\star) est à préciser :

- (\Rightarrow) Si $\text{pgcd}(m, n) = n$ alors d'après la question précédente : $\text{pgcd}(F_m, F_n) = F_n$.
- (\Leftarrow) Réciproquement si $\text{pgcd}(F_m, F_n) = F_n$ alors, toujours d'après la question précédente, $F_{\text{pgcd}(m,n)} = F_n$. Or la suite de Fibonacci est strictement croissante à partir du rang $n = 2$ ainsi comme $n \geq 3$:

$$F_{\text{pgcd}(m,n)} = F_n \Rightarrow \text{pgcd}(m, n) = n$$

$$\boxed{\forall n \geq 3, \forall m \in \mathbb{N}, F_n | F_m \Leftrightarrow n|m}$$

4. On constate que F_0, F_1 et F_2 ne sont pas premiers. Prenons $m \geq 3$ et supposons que F_m est un nombre premier. Par l'absurde, supposons que m n'est pas un nombre premier alors il possède un facteur $n \geq 3$. Or d'après la question précédente, $n|m$ implique $F_n | F_m$ avec $F_n \geq 2$. Ce qui démontre que F_m n'est pas premier, d'où la contradiction.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F_n \text{ est premier implique } n \text{ est premier}}$$

La réciproque est fautive, il faut s'aider d'une calculatrice ou de l'outil informatique pour démontrer que :

$$\boxed{F_{19} = 4181 = 37 \times 113}$$

D-Théorème de Zeckendorf

1. (a) On a :

$$\begin{array}{l} 1 = F_2 \\ 2 = F_3 \\ 3 = F_4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 4 = F_4 + F_2 \\ 5 = F_5 \\ 6 = F_5 + F_2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 7 = F_5 + F_3 \\ 8 = F_6 \\ 9 = F_6 + F_2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 10 = F_6 + F_3 \\ 11 = F_6 + F_4 \\ 12 = F_6 + F_4 + F_2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 13 = F_7 \end{array} \right.$$

(b) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et notons $A = \{k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \text{ et } F_k \leq n\}$. Nous allons démontrer que A est non vide et majorée, ainsi A va admettre un plus grand élément.

- $A \subset \mathbb{N}$
- A est non vide car $2 \in A$ puisque $F_2 = 1 \leq n$.
- Nous avons démontré à la question 1.(b) de la partie A que $\lim_{k \rightarrow +\infty} F_k = +\infty$, par définition de la limite :

$$\exists m \in \mathbb{N}, \forall k \geq m, F_k \geq n + 1$$

Ce qui démontre que A est majorée par m .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \{k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \text{ et } F_k \leq n\} \text{ admet un maximum noté } k_1$$

(c) Démontrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$:

\mathcal{H}_n : n possède une décomposition de Zeckendorf

- **Initialisation.** Nous avons vu à la question (a) que \mathcal{H}_1 est vraie.
- **Hérédité.** Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que \mathcal{H}_i est vérifiée pour $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Grâce à la question précédente, on est assuré de l'existence de :

$$k_1 = \max\{k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \text{ et } F_k \leq n\}$$

Notons que par définition du maximum, $k_1 + 1 \notin \{k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \text{ et } F_k \leq n\}$ ainsi $F_{k_1+1} > n$. Deux cas se présentent :

- Si $F_{k_1} = n$ alors n admet une décomposition de Zeckendorf.
- Si $F_{k_1} < n$, on a $n - F_{k_1} \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et des entiers $(k_i)_{2 \leq i \leq p}$ tels que :

$$n - F_{k_1} = \sum_{i=2}^p F_{k_i} \text{ et } k_2 \gg \dots \gg k_p \gg 0$$

Il reste à garantir que $k_1 \gg k_2$, c'est-à-dire que $k_1 \geq k_2 + 2$. Déjà $k_2 \leq k_1$ par définition de k_1 comme étant un maximum. Si $k_2 = k_1$ ou $k_2 = k_1 - 1$, on a :

$$F_{k_1} + F_{k_2} \geq F_{k_1} + F_{k_1-1} = F_{k_1+1} > n$$

ce qui est absurde.

Finalement, on a bien $k_1 \gg k_2$ et :

$$n = \sum_{i=1}^p F_{k_i} \text{ et } k_1 \gg k_2 \gg \dots \gg k_p \gg 0$$

Ce qui démontre que \mathcal{H}_n est vraie et termine la récurrence.

$$\text{Tout entier naturel non nul admet une décomposition de Zeckendorf}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que n admet une décomposition de Zeckendorf :

$$n = \sum_{i=1}^p F_{k_i} \text{ et } k_1 \gg k_2 \gg \dots \gg k_p \gg 0$$

On a immédiatement $n \leq F_{k_1}$. D'autre part, puisque les entiers $(k_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont au moins espacés de 2 :

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + F_{k_3} + \dots + F_{k_p} \leq F_{k_1} + F_{k_1-2} + F_{k_1-4} + F_{k_1-2(p-1)}$$

D'après les questions 2.(a) et 2.(b) de la partie A, on sait que :

• si k_1 est pair alors :

$$n = F_{k_1} + F_{k_1-2} + F_{k_1-4} + F_{k_1-2(p-1)} \leq \sum_{i=0}^{\frac{k_1}{2}} F_{2i} = F_{k_1+1} - 1$$

• si k_1 est impair alors :

$$n = F_{k_1} + F_{k_1-2} + F_{k_1-4} + F_{k_1-2(p-1)} \leq \sum_{i=1}^{\frac{k_1-1}{2}} F_{2i+1} < \sum_{i=0}^{\frac{k_1-1}{2}} F_{2i+1} = F_{k_1+1}$$

Dans les deux cas : $n < F_{k_1+1}$

Enfin, l'entier k_1 vérifie : $F_{k_1} \leq n < F_{k_1+1}$. Or, la suite de Fibonacci étant strictement croissante à partir du rang 2 puisque si $n \geq 2$ alors :

$$F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \geq 1$$

Ainsi, il existe un unique entier naturel $k_1 \geq 2$ tel que : $F_{k_1} \leq n < F_{k_1+1}$.

L'entier k_1 est défini de façon unique

3. Démontrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$:

\mathcal{H}_n : n possède une décomposition unique de Zeckendorf

• **Initialisation.** Il est clair que 1 possède une unique décomposition de Zeckendorf : $1 = F_2$. En effet, la décomposition $1 = F_1$ ne convient pas puisque l'on doit avoir $k_1 \gg 0$, c'est-à-dire $k_1 \geq 2$.

• **Hérédité.** Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que \mathcal{H}_i est vérifiée pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Grâce aux questions précédentes, on est assuré de l'existence et de l'unicité de k_1 tel que :

$$n = \sum_{i=1}^p F_{k_i} \text{ et } k_1 \gg k_2 \gg \dots \gg k_p \gg 0$$

Si $n = F_{k_1}$, on a bien l'unicité de la décomposition.

Sinon $n - F_{k_1} \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ a une unique décomposition de Zeckendorf par hypothèse de récurrence : ce qui démontre que k_2, k_3, \dots, k_p sont uniques. Ainsi n admet une unique décomposition de Zeckendorf, ce qui termine la récurrence.

Tout entier naturel non nul admet une unique décomposition de Zeckendorf

4. Soit $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$. On peut vérifier que sur la carte i se trouve tous les entiers entre 1 et 54 dont la décomposition de Zeckendorf contient F_{i+1} . Ainsi par unicité de la décomposition de Zeckendorf, il suffit de sommer les nombres de Fibonacci correspondant aux cartes désignées par le cobaye pour retrouver le nombre choisit. On remarque d'ailleurs que les nombres à sommer sont les plus petits nombres de chaque carte.

Par exemple, si les cartes 2, 6 et 8 sont désignées, on sait que le nombre choisit va être :

$$F_3 + F_7 + F_9 = 2 + 13 + 34 = 49$$

En effet, 49 est le seul nombre qui apparaît dans les cartes 2, 6 et 8.

 Problème de Synthèse I (Structures Algébriques)

Partie I

- Q1)** Une équation de \mathcal{D}_t est $y = t(x - 1)$.
Q2) On cherche à résoudre l'équation $x^2 + y^2 = 1$ avec $y = t(x - 1)$ et $x \neq 1$, ce qui donne $x^2 + t^2(x - 1)^2 = 1$ d'où $x + 1 + t^2(x - 1) = 0$ et donc :

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \text{ et } y = \frac{-2t}{t^2 + 1}$$

- Q3)** Si t est rationnel, alors $x(t)$ et $y(t)$ aussi d'après les formules ci-dessus. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont rationnels alors comme $x(t) \neq 1$ on a $\frac{y(t)}{x(t) - 1}$ rationnel, c'est à dire $t \in \mathbb{Q}$, donc :

$$t \in \mathbb{Q} \iff x(t), y(t) \in \mathbb{Q}$$

- Q4)** Soit $E = \{M(x, y) \in \mathcal{C} \setminus \{A\} / x, y \in \mathbb{Q}\}$. On a une application de \mathbb{Q} dans E qui est évidemment injective. Si $M \in E$, soit t la pente de la droite (AM) alors $M = M(t)$ et $t \in \mathbb{Q}$, donc l'application est également surjective :

L'application $M : \mathbb{Q} \rightarrow E$ définie par $M(t) = M(x(t), y(t))$ est bijective

- Q5)** En posant $t = -\frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux, on obtient $x(t) = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ et $y(t) = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$, ce qui nous donne tous les points de $\mathcal{C} \setminus \{A\}$. On peut remarquer qu'en prenant $q = 0$ et $p = 1$ on obtient $x = 1$ et $y = 0$ ce qui correspond au point A (mais t bien sûr n'est pas défini dans ce cas). Les points de \mathcal{C} à coordonnées rationnelles sont les points $M(x, y)$ avec :

$$x = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}, y = \frac{2pq}{p^2 + q^2} \text{ avec } p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } p \wedge q = 1$$

Partie II

- Q1)** Une solution de cette équation est, par exemple, $a = 3$, $b = 4$ et $c = 5$.
Q2) Si $d = a \wedge b$, alors $d^2 = a^2 \wedge b^2 = (a^2 + b^2) \wedge b^2 = c^2 \wedge b^2 = [c \wedge b]^2$, on en déduit que $d = c \wedge b$. De la même façon, $d^2 = a^2 \wedge b^2 = (a^2 + b^2) \wedge a^2 = c^2 \wedge a^2 = [c \wedge a]^2$, donc $d = a \wedge c$.
Q3) (a, b, c) est solution avec c non nul si et seulement si $(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = 1$, ce qui revient à dire que le point de coordonnées $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ est un point de \mathcal{C} à coordonnées rationnelles, d'après la partie I, cela équivaut à l'existence de deux entiers p et q premiers entre eux tels que : $\frac{a}{c} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ et $\frac{b}{c} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$, c'est à dire :

$$\frac{a'}{c'} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \text{ et } \frac{b'}{c'} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$$

Q4) On a $(p^2 + q^2)a' = (p^2 - q^2)c'$ or $a' \wedge c' = 1$ donc $a' \mid p^2 - q^2$ et $c' \mid p^2 + q^2$ ce qui donne $p^2 - q^2 = ka'$ et $p^2 + q^2 = k'c'$, en reportant dans l'égalité, il vient que $k = k'$. De même, $(p^2 + q^2)b' = 2pq c'$ avec $b' \wedge c' = 1$, or $p^2 + q^2 = kc'$ d'où en simplifiant $2pq = kb'$. Finalement :

$$\begin{cases} p^2 - q^2 = ka' \\ 2pq = kb' \\ p^2 + q^2 = kc' \end{cases}$$

Q5) $(p^2 + q^2) \wedge (2pq) = (ka') \wedge (kb') = k(a' \wedge b') = |k|$. D'autre part, pq et $p^2 + q^2$ sont premiers entre eux, car si un nombre premier divise les deux, alors il doit diviser p ou q , et $p^2 + q^2$, donc il divise p et q : absurde car $p \wedge q = 1$. Il reste donc :

$$|k| = (p^2 + q^2) \wedge (2pq) = (p^2 + q^2) \wedge 2$$

Q6) Si p et q sont de parité différente alors, $p^2 + q^2$ est impair donc $|k| = (p^2 + q^2) \wedge 2 = 1$, ce qui donne (en englobant les deux cas : $k = 1$ et $k = -1$) :

$$\begin{cases} a = d(p^2 - q^2) \\ b = d(2pq) \\ c = d(p^2 + q^2) \end{cases} \text{ avec } d \in \mathbb{Z}^*, p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } p \wedge q = 1.$$

Q7) Si p et q sont de même parité, ils sont forcément impairs (car premiers entre eux), et $p^2 + q^2$ est pair donc $|k| = (p^2 + q^2) \wedge 2 = 2$. $(2u) \wedge (2v) = (p + q) \wedge (p - q) = (2p) \wedge (p - q) = 2 \wedge (p - q) = 2$, car p est premier avec $p - q$, et $p - q$ est pair, il en découle que $u \wedge v = 1$. On a $p = u + v$ et $q = u - v$ d'où $p^2 - q^2 = 4uv = 2a'$ donc $a' = 2uv$, $2pq = 2(u^2 - v^2) = 2b'$ donc $b' = u^2 - v^2$, $p^2 + q^2 = 2(u^2 + v^2) = 2c'$ donc $c' = u^2 + v^2$. Finalement (en englobant les deux cas : $k = 2$ et $k = -2$) :

$$\begin{cases} a = d(2uv) \\ b = d(u^2 - v^2) \\ c = d(u^2 + v^2) \end{cases} \text{ avec } d \in \mathbb{Z}^*, u, v \in \mathbb{Z} \text{ et } u \wedge v = 1.$$

Q8) Les solutions obtenues dans la question précédente sont les mêmes que celles de la question d'avant en échangeant le rôles de a et b (qui jouent des rôles symétriques dans l'équation). Les solutions de l'équation $a^2 + b^2 = c^2$ sont donc les triplets (a, b, c) et les triplets (b, a, c) avec :

$$\begin{cases} a = d(p^2 - q^2) \\ b = d(2pq) \\ c = d(p^2 + q^2) \end{cases} \text{ avec } d \in \mathbb{Z}^*, p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } p \wedge q = 1.$$

 Problème de Synthèse I (Structures Algébriques)

1. Soit f linéaire, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$. On vérifie la relation (★) :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$

Les fonctions linéaires vérifient la relation (★)

2. (a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} comme différence de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , puisque par hypothèse f est dérivable sur \mathbb{R} .

La fonction f vérifie la relation (★), ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = f(x + y) - f(x) = f(y)$$

La fonction g est constante sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R} donc sa dérivée est nulle sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 0$$

- (b) D'autre part, si on dérive g en utilisant l'expression la définissant, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x + y) - f'(x) = 0$$

En particulier, pour $x = 0$, nous obtenons $f'(y) - f'(0) = 0$, cette relation est bien valable quelque soit $y \in \mathbb{R}$. On note $a = f'(0)$ et on a :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f'(y) = a$$

- (c) On travaille sur l'intervalle \mathbb{R} ainsi la relation de la question précédente nous donne l'existence de $b \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto ax + b$. Cependant avec la relation (★) utilisée en $x = y = 0$, on obtient directement $f(0) = 0$ donc $b = 0$.

f est linéaire

3. (a) On applique la formule (★) avec $x = 0$ et $y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$. Ce qui démontre que $f(0) = 0$.

$$f(0) = 0$$

- (b) Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n que :

$$\mathcal{H}_n : f(n) = an$$

- **Initialisation.** \mathcal{H}_0 est vraie puisque $f(0) = 0$.
- **Hérédité.** On suppose \mathcal{H}_n vraie pour un entier naturel n fixé. On a :

$$f(n + 1) = f(n) + f(1) = an + a = a(n + 1)$$

Ce qui termine la récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an$$

(c) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on a $-n \in \mathbb{N}$ donc d'après la question précédente $f(-n) = a(-n)$ et :

$$f(n + (-n)) = f(n) + f(-n) \Leftrightarrow 0 = f(n) + a(-n)$$

Ce qui démontre que $f(n) = an$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = an}$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On démontre par récurrence sur $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}_q : f(qx) = qf(x)$$

• **Initialisation.** La formule est évidente pour $q = 1$.

• **Hérédité.** On suppose \mathcal{H}_q vraie pour $q \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$f((q+1)x) = f(qx + x) = f(qx) + f(x) = qf(x) + f(x) = (q+1)f(x)$$

Ce qui démontre que \mathcal{H}_{q+1} est vraie et termine la récurrence.

Soit $r \in \mathbb{Q}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$. D'après la formule démontrée dans la récurrence précédente, on a :

$$ap = f(p) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = f(qr) = qf(r)$$

Ainsi $f(r) = a\frac{p}{q} = ar$

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = ar}$$

(e) Soit x un réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} :

$$\exists r_n \in \mathbb{Q}, x - \frac{1}{n} \leq r_n \leq x$$

D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$.

On utilise la question précédente puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, r_n est rationnel. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(r_n) = ar_n$, on passe à la limite dans l'égalité et grâce à la continuité de f , il vient : $f(x) = ax$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = f(x)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax}$$

4. (a) i. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On procède par encadrement :

$$10^{n+1}x - 1 < E(10^{n+1}x) \leq 10^{n+1}x$$

et

$$10^n x - 1 < E(10^n x) \leq 10^n x \implies -10^{n+1}x \leq -10E(10^n x) < 10 - 10^{n+1}x$$

En sommant, il vient :

$$-1 < E(10^{n+1}x) - 10E(10^n x) < 10$$

Étant donné que $E(10^{n+1}x) - 10E(10^n x)$ est un entier, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, E(10^{n+1}x) - 10E(10^n x) \in \llbracket 0, 9 \rrbracket}$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$, en utilisant le résultat de la question précédente, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{E(10^{n+1}x)}{10^{n+1}} - \frac{E(10^n x)}{10^n} = \frac{E(10^{n+1}x) - 10E(10^n x)}{10^{n+1}} \geq 0$$

Ce qui démontre que (u_n) est croissante.

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$ et toujours en utilisant l'encadrement de la question précédente, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{E(10^{n+1}x) + 1}{10^{n+1}} - \frac{E(10^n x) + 1}{10^n} = \frac{E(10^{n+1}x) - 10E(10^n x) - 9}{10^{n+1}} \leq 0$$

La suite (v_n) est décroissante.

(u_n) croît et (v_n) décroît

iii. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n - u_n = \frac{E(10^n x) + 1}{10^n} - \frac{E(10^n x)}{10^n} = \frac{1}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'après la question précédente, toutes les conditions sont réunies pour affirmer que :

(u_n) et (v_n) sont adjacentes

iv. On a :

$$E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1 \implies \frac{E(10^n x)}{10^n} \leq x < \frac{E(10^n x) + 1}{10^n}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq x \leq v_n$

v. Les suites (u_n) et (v_n) étant adjacentes, elles convergent vers une limite commune, notons-là $l \in \mathbb{R}$.
On passe à la limite dans la relation trouvée à la question précédente : $l \leq x \leq l$. On en déduit que $l = x$ et que (u_n) et (v_n) convergent vers x .

(u_n) et (v_n) convergent vers x

(b) Par croissance de la fonction f sur \mathbb{R} , pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \leq x \leq v_n \implies f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n)$$

Or u_n et v_n sont des nombres rationnels donc d'après la question 3.(d), on a : $f(u_n) = au_n$ et $f(v_n) = av_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, au_n \leq f(x) \leq av_n$

(c) On passe à la limite dans la relation précédente pour obtenir $ax \leq f(x) \leq ax$. On vient de démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

f est linéaire

(d) Réciproquement une fonction linéaire vérifie (★) comme nous l'avons démontré dans la question 1. et elle est croissante si et seulement si $a \geq 0$.

Les fonctions croissantes qui vérifient (★) sont de la forme $x \mapsto ax$ avec $a \geq 0$