Concours Blanc N°2

Polynômes & Matrices

Lundi 18 Mars 2019

Durée : 4 heures

Documents et Calculatrices Interdits

Exercice Application de Cours : Polynômes et Fractions Rationnelles

Question 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit le polynôme

$$P_n = X^{n+2} - X^{n+1} - 2X^n - X^2 + X + 2\,.$$

Écrire la factorisation du polynôme P_n en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Pour quelles valeurs de n le polynôme P_n admet-il une racine double ?

Question 2

1. Écrire le développement limité à l'ordre trois en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-2x}$.

2. En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $R = \dfrac{1}{X^4(1-2X)}$.

3. Calculer la primitive $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4(1-2x)}$.

Question 3

Pour tout entier naturel n, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1+t)^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme P_n et de réels a_n et b_n tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \frac{(1+t)^n}{1+t^2} = P_n(t) + \frac{a_n + b_n t}{1+t^2}\,.$$

Calculer a_n et b_n (on les exprimera en fonction de $2^{\frac{n}{2}}$, $\cos n\frac{\pi}{4}$ et $\sin n\frac{\pi}{4}$). Expliquer pourquoi le polynôme P_n est à coefficients rationnels.

3. Montrer que l'on peut écrire $I_n = p_n + q_n\pi + r_n \ln 2$, où p_n, q_n, r_n sont des nombres rationnels (*on admettra l'unicité d'une telle écriture*).

4. Calculer $I_{n+2} - 2I_{n+1} + 2I_n$.

5.a. Montrer que $q_n = \dfrac{1}{4}\operatorname{Re}\left[(1+i)^n\right]$ et $r_n = \dfrac{1}{2}\operatorname{Im}\left[(1+i)^n\right]$.

b. Pour quels entiers n a-t-on $q_n = 0$? Même question pour la condition $r_n = 0$?

c. Du **a.**, déduire la valeur de $q_{n+2} - 2q_{n+1} + 2q_n$ et de $r_{n+2} - 2r_{n+1} + 2r_n$.

6. Établir une relation entre p_n, p_{n+1} et p_{n+2}. Calculer p_5.

7. En utilisant une intégration par parties, donner un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$. À l'aide d'une nouvelle intégration par parties, obtenir un développement asymptotique de la forme

$$I_n = \frac{2^n}{n}\left(A + \frac{B}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Problème de Synthèse I : Polynômes

Dans le problème, on notera $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On identifiera les polynômes et les fonctions polynômiales associées.

1 Polynômes de Tchebychev

Q 1 Montrer qu'il existe un polynôme T_n à coefficients entiers vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \tag{1}$$

Q 2 Expliciter les polynômes T_0, T_1, T_2, T_3 et T_4.

Q 3 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \tag{2}$$

Q 4 En déduire le degré et le coefficient dominant du polynôme T_n.

Q 5 Écrire une procédure Maple `tchebychev : n : int, x : float` qui retourne le réel $T_n(x)$ pour $n \geq 2$.

Q 6 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, les polynômes T_n et T_{n+1} sont premiers entre eux.

2 Calcul de normes

Pour un polynôme $P \in E$, on note

$$\|P\| = \sup_{x\in[-1,1]} \left|P(x)\right|$$

Q 7 Vérifier que :

a. $\|P\|$ est bien défini.
b. $\forall (P,Q) \in E^2$, $\|P+Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$
c. $\forall P \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda.P\| = |\lambda|\|P\|$
d. $\forall P \in E$, $\|P\| = 0 \Longleftrightarrow P = 0_E$.

On dit que $\|.\|$ définit une *norme* sur l'espace E.

Q 8 Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\|T_n\|$.

Q 9

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $\left|\sin(nu)\right| \leq n\left|\sin(u)\right|$.
b. En déduire que $\|T_n'\| \leq n^2$.

Q 10

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall r \in \mathbb{R}^*$, $T_n\Big(\dfrac{r+r^{-1}}{2}\Big) = \dfrac{r^n + r^{-n}}{2}$

b. Soit un réel $x \in [1, +\infty[$. Montrer qu'il existe un réel $r \geq 1$ tel que $x = \dfrac{r + r^{-1}}{2}$.

c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \geq 1, \quad 1 \leq T_n(x) \leq \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n \tag{3}$$

Q 11

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 T_n - X T_n' + (1 - X^2) T_n'' = 0 \tag{4}$$

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$,

$$(n^2 - k^2) T_n^{(k)} - (2k+1) X T_n^{(k+1)} + (1 - X^2) T_n^{(k+2)} = 0 \tag{5}$$

c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$,

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n}{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{2^k k!}{(2k)!} \tag{6}$$

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k} T_n^{(k)}(1)$.

3 Majoration d'un polynôme sur $[1, +\infty[$

Pour un entier $n \geq 2$, on définit pour $j \in [\![0,n]\!]$, $a_j = \cos\left[\left(1 - \frac{j}{n}\right)\pi\right]$. On obtient ainsi une subdivision $-1 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ du segment $[-1,1]$. Pour $i \in [\![0,n]\!]$, on définit le ième polynôme de Lagrange

$$L_i = \prod_{\substack{j \in [\![0,n]\!] \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

Q 12

a. Déterminer les réels $x \in [-1,1]$ vérifiant $|T_n(x)| = 1$.

b. Calculer $T_n'(a_j)$ pour $j = n$, $j = 0$ puis pour $j \in [\![1,n-1]\!]$.

Q 13

a. Montrer que pour tout polynôme $P \in E_n$,

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i \tag{7}$$

b. Montrer que

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} L_i \tag{8}$$

c. Soit $x \in [1, +\infty[$. Montrer que

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)| \tag{9}$$

d. Soit un polynôme $P \in E_n$. Montrer que

$$\forall x \in [1, +\infty[, \ |P(x)| \leq \|P\| \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n \tag{10}$$

Q 14

a. Montrer que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \forall x \in [1,+\infty[, \quad T_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left| L_i^{(k)}(x) \right| \tag{11}$$

b. Soit un polynôme $P \in E_n$. Montrer que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \forall x \in [1,+\infty[, \quad \left| P^{(k)}(x) \right| \leq \|P\| \, T_n^{(k)}(x) \tag{12}$$

4 Majoration des dérivées d'un polynôme sur $[-1,1]$

Soit un entier $n \geq 2$ et un polynôme $P \in E_n$. On considère un entier $k \in [\![1,n]\!]$. Pour $\lambda \in [-1,1]$, on définit le polynôme

$$P_\lambda = P\left(\frac{\lambda+\varepsilon}{2} X + \frac{\lambda-\varepsilon}{2}\right) \tag{13}$$

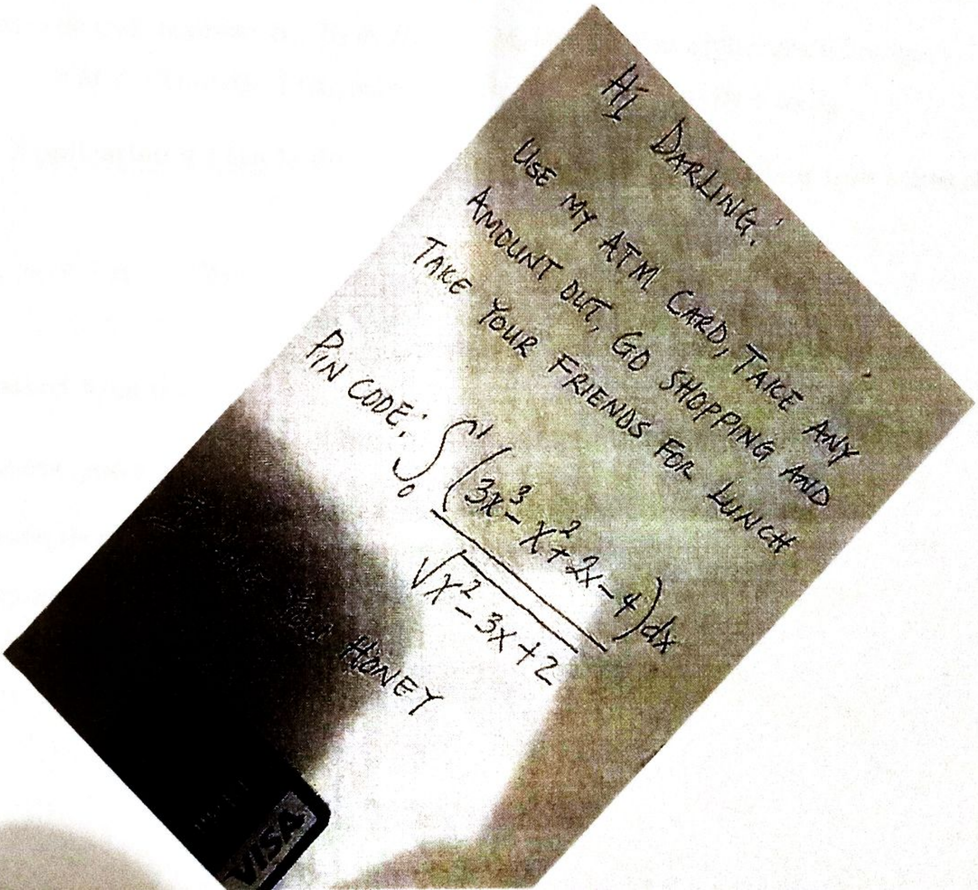
où $\varepsilon = +1$ si $\lambda \in [0,1]$ et $\varepsilon = -1$ si $\lambda \in [-1,0[$.

Q 15 Montrer que

$$\left| P_\lambda^{(k)}(1) \right| = \left(\frac{|\lambda|+1}{2}\right)^k \left| P^{(k)}(\lambda) \right| \tag{14}$$

Q 16 En déduire que

$$\|P^{(k)}\| \leq 2^{2k} \frac{k!}{(2k)!} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \|P\| \tag{15}$$



Exercice Application de Cours : Matrices

Dans $M_3(\mathbb{R})$, on considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix}-3&-1&-3\\2&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad P=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&1&2\\-1&1&1\end{pmatrix}\quad Q=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

➤ **Partie A - Calcul des puissances de A.**

1) Montrer que P est inversible et calculer son inverse. Indication : Pensez à calculer P.Q

2) On pose $D=P^{-1}AP$. Calculer D (on vérifiera que D est une matrice diagonale).

3) Soit n un entier naturel. Exprimer D^n en fonction de n.

4) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A^n=PD^nP^{-1}$.

➤ **Partie B - Etude du commutant de A.** On rappelle que pour une matrice $N\in M_3(\mathbb{R})$, le commutant de N désigne l'ensemble noté $\mathrm{COM}(N)$ des matrices $Q\in M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N, c'est-à-dire telles que $NQ=QN$.

5) Soit $M\in M_3(\mathbb{R})$. Etablir l'équivalence : $[M\in \mathrm{COM}(A)]\iff [P^{-1}MP\in \mathrm{COM}(D)]$

6) Déterminer $\mathrm{COM}(D)$.

7) Déduire de ce qui précède $\mathrm{COM}(A)$.

8) Etablir l'existence de trois matrices B_1, B_2 et B_3 dans $M_3(\mathbb{R})$ que l'on explicitera telles que :

$$\forall M\in \mathrm{COM}(A),\ \exists\,(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^3,\ M=\alpha_1B_1+\alpha_2B_2+\alpha_3B_3$$

➤ **Partie C - Application à l'étude de trois suites imbriquées.** On définit trois suites réelles u, v et w en posant :

$$u_0=1,\ v_0=1,\ w_0=0 \text{ et : }\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases}u_{n+1}=-3u_n-v_n-3w_n\\ v_{n+1}=2u_n+3v_n\\ w_{n+1}=2u_n+v_n+2w_n\end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$.

Soit n un entier naturel quelconque.

9) Etablir une relation de récurrence entre X_{n+1} et X_n.

10) Déduire de ce qui précède une relation entre X_n et X_0.

11) Déterminer les expressions des termes généraux u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Problème de Synthèse II : Matrices

(Définition matricielle du corps des nombres complexes)

Préambule

Les nombres complexes ont été introduits dans les mathématiques il y a environ quatre siècles, dans les travaux de Jérôme Cardan et Raphaël Bombelli†. Pour faire court, ces deux mathématiciens ont défini le nombre i comme une solution de l'équation $x^2 = -1$, et c'est cette définition qui a traversé les âges pour intervenir encore dans votre cours de Terminale.*

Mais une autre approche des nombres complexes aurait été possible, en utilisant le calcul matriciel. Cette approche constitue l'objet du présent problème, dont le but est d'essayer de vous convaincre que l'on aurait pu définir les nombres complexes autrement. Explicitement, au lieu de voir ici un complexe comme un nombre s'écrivant $a + ib$, on définira un complexe comme une matrice de la forme $a\mathrm{I} + b\mathrm{J}$ (où I est la matrice identité I_2, et J une matrice telle que $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}$).

L'intérêt de cette approche est géométrique, dans un sens qui sera rendu explicite dans la dernière partie de ce problème.

L'ensemble des "nombres complexes" que nous définirons dans cet énoncé sera donc un ensemble de matrices, et les différentes parties de ce problème auront pour but de prouver que toutes les propriétés que vous avez vues dans le chapitre "Complexes" de cette année s'adaptent à notre nouveau point de vue.

Pour finir, n'ayez pas peur de ce saut dans l'inconnu ! Un grand nombre des questions de ce problème vous paraîtront évidentes dès lors que vous avez bien révisé votre cours sur les complexes, le calcul matriciel et les groupes... Enfin, les différentes parties de ce problème ne sont pas du tout indépendantes ; mais vous pouvez bien entendu utiliser les résultats d'une question dans une autre.

Notations

Dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pourra se convaincre aisément que $\boxed{\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I} \quad (\bigstar)}$.

On définit les deux sous-ensembles $\widehat{\mathbf{R}}$ et $\widehat{\mathbf{C}}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ en posant :

$$\widehat{\mathbf{R}} = \{a\mathrm{I} \,/\, a \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\mathbf{C}} = \left\{a\mathrm{I} + b\mathrm{J} \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

càd :

$$\widehat{\mathbf{R}} = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}\right\} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\mathbf{C}} = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On pourra observer que $\widehat{\mathbf{R}} \subsetneq \widehat{\mathbf{C}}$.

Pour tout couple (a,b) de nombres réels, on notera $Z(a,b)$ l'élément $a\mathrm{I} + b\mathrm{J} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ de $\widehat{\mathbf{C}}$.

On notera encore : $\overline{Z(a,b)} = Z(a,-b)$.

Enfin, pour tout élément $Z(a,b)$ de $\widehat{\mathbf{C}}$ on définit son **module** en posant : $|Z(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$.

*. Qui n'était pas biélorusse.

†. Lui non plus.

➤ Partie A - Quelques propriétés algébriques de $\widehat{\mathbb{R}}$ et de $\widehat{\mathbb{C}}$

1) Justifier brièvement que l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}\\ x &\longmapsto Z(x,0)\end{aligned}$$

est une bijection.

2) Montrer que $\left(\widehat{\mathbb{C}},+\right)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+)$. En déduire que $\left(\widehat{\mathbb{C}},+\right)$ est un groupe abélien.

3) Montrer que $\left(\widehat{\mathbb{R}},+\right)$ est un sous-groupe de $\left(\widehat{\mathbb{C}},+\right)$. En déduire que $\left(\widehat{\mathbb{R}},+\right)$ est un groupe abélien.

4) Soit $Z(a,b) \in \widehat{\mathbb{C}}$. Vérifier que : $Z(a,b) + \overline{Z(a,b)} = 2a\mathrm{I}$ et $Z(a,b) - \overline{Z(a,b)} = 2b\mathrm{J}$.

5) Soient $Z(a,b)$ et $Z(a',b')$ dans $\widehat{\mathbb{C}}$. Calculer : $Z(a,b) \times Z(a',b')$.

6) Soient x un réel et $Z(a,b) \in \widehat{\mathbb{C}}$. Vérifier que : $Z(x,0) \times Z(a,b) = Z(xa,xb)$.

7) Propriétés du module.

a) Soit $Z(a,b) \in \widehat{\mathbb{C}}$. Montrer que : $Z(a,b) \times \overline{Z(a,b)} = |Z(a,b)|^2 \times \mathrm{I}$.

b) Montrer que :

$$\forall\,(Z(a,b), Z(a',b')) \in \widehat{\mathbb{C}}^2,\ |Z(a,b) \times Z(a',b')| = |Z(a,b)| \times |Z(a',b')|$$

c) Soit $Z(a,b)$ un élément de $\widehat{\mathbb{C}}$. Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad |Z(a,b)^n| = |Z(a,b)|^n$.

➤ Partie B - Les corps $\widehat{\mathbb{R}}$ et $\widehat{\mathbb{C}}$

8) Le corps $\widehat{\mathbb{R}}$.

a) Montrer que le produit matriciel (la loi "$\times$") est une LCI sur $\widehat{\mathbb{R}}$. Justifier brièvement que cette LCI possède un élément neutre dans $\widehat{\mathbb{R}}$, et est commutative.

Par la suite, on pourra admettre que la loi $\times$ est associative, distributive par rapport à l'addition, et que pour tout $Z(x,0)$ dans $\widehat{\mathbb{R}}$ on a : $\mathbb{Z}(x,0) \times 0_{M_2(\mathbb{R})} = 0_{M_2(\mathbb{R})} = 0_{M_2(\mathbb{R})} \times Z(x,0)$. Les propriétés énoncées ci-dessus permettent alors d'affirmer que $\left(\widehat{\mathbb{R}},+,\times\right)$ est un anneau commutatif.

b) Montrer que l'anneau $\left(\widehat{\mathbb{R}},+,\times\right)$ est intègre, et que tout élément non nul de $\left(\widehat{\mathbb{R}},+,\times\right)$ est inversible [‡] dans $\widehat{\mathbb{R}}$.

9) Le corps $\widehat{\mathbb{C}}$.

a) Montrer que le produit matriciel (la loi "$\times$") est une LCI sur $\widehat{\mathbb{C}}$.

b) Justifier brièvement que cette LCI possède un élément neutre dans $\widehat{\mathbb{C}}$.

Par la suite, on pourra admettre que la loi $\times$ est associative, distributive par rapport à l'addition, et que pour tout $Z(a,b)$ dans $\widehat{\mathbb{C}}$ on a : $\mathbb{Z}(a,b) \times 0_{M_2(\mathbb{R})} = 0_{M_2(\mathbb{R})} = 0_{M_2(\mathbb{R})} \times Z(a,b)$. Les propriétés énoncées ci-dessus permettent alors d'affirmer que $\left(\widehat{\mathbb{C}},+,\times\right)$ est un anneau.

c) Montrer que l'anneau $\left(\widehat{\mathbb{C}},+,\times\right)$ est commutatif.

‡. Pour la loi $\times$.

d) Montrer que tout élément non nul de $\widehat{\mathbb{C}}$ est inversible[§] dans $\widehat{\mathbb{C}}$.

e) Déduire de ce qui précède que l'anneau $\left(\widehat{\mathbb{C}},+,\times\right)$ est intègre, puis que l'anneau $\left(\widehat{\mathbb{C}},+,\times\right)$ est un corps.

f) Soit $Z(a,b) \in \widehat{\mathbb{C}}$, avec $Z(a,b) \neq \mathrm{I}$. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\sum_{k=0}^{n} Z(a,b)^k = \left(\mathrm{I} - Z(a,b)^{n+1}\right) \times \left(\mathrm{I} - Z(a,b)\right)^{-1}$$

➤ Partie C - Notation exponentielle

Pour tout réel θ, on pose :

$$\mathrm{E}^{\theta \mathrm{J}} = Z(\cos\theta, \sin\theta) \qquad \text{càd} \qquad \mathrm{E}^{\theta \mathrm{J}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

10) Vérifier que pour tout réel θ on a : $\left|\mathrm{E}^{\theta \mathrm{J}}\right| = 1$.

11) Montrer que pour tout couple $(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2$ on a : $\mathrm{E}^{\theta \mathrm{J}} \times \mathrm{E}^{\varphi \mathrm{J}} = \mathrm{E}^{(\theta+\varphi)\mathrm{J}}$.

12) Montrer que pour tout réel θ on a : $\left(\mathrm{E}^{\theta \mathrm{J}}\right)^{-1} = \mathrm{E}^{(-\theta)\mathrm{J}}$.[¶]

13) Justifier que pour tout couple $(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2$ on a : $\left[\mathrm{E}^{\theta \mathrm{J}} = \mathrm{E}^{\varphi \mathrm{J}}\right] \Longleftrightarrow [\theta = \varphi \ [2\pi]]$.

➤ Partie D - Forme exponentielle d'un élément non nul de $\widehat{\mathbb{C}}$

A partir de maintenant, on note $\widehat{\mathbb{C}}^*$ l'ensemble des éléments non nuls de $\widehat{\mathbb{C}}$, càd : $\widehat{\mathbb{C}}^* = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \left\{0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$.

14) Soit $Z(a,b) \in \widehat{\mathbb{C}}^*$. Montrer qu'il existe deux réels α et β que l'on exprimera en fonction de a et b tels que :

$$Z(a,b) = |Z(a,b)| \times Z(\alpha,\beta)$$

15) Avec les notations de la question précédente, vérifier que : $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

16) En déduire que pour tout $Z(a,b) \in \widehat{\mathbb{C}}^*$, il existe un réel θ tel que

$$Z(a,b) = |Z(a,b)| \times \mathrm{E}^{\theta \mathrm{J}}$$

Par la suite, ce réel θ sera appelé **argument** de $Z(a,b)$, et il sera noté : $\mathrm{ARG}(Z(a,b))$.

17) **Méthode d'identification dans $\widehat{\mathbb{C}}^*$**. Soient $Z(a,b)$ et $Z(a',b')$ dans $\widehat{\mathbb{C}}^*$. Montrer que

$$\left(Z(a,b) = Z(a',b')\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} |Z(a,b)| = |Z(a',b')| \\ \\ \mathrm{ARG}(Z(a,b)) = \mathrm{ARG}(Z(a',b')) \quad [2\pi] \end{cases}$$

18) Soient $Z(a,b)$ et $Z(a',b')$ dans $\widehat{\mathbb{C}}$. Montrer que :

$$\mathrm{ARG}(Z(a,b) \times Z(a',b')) = \mathrm{ARG}(Z(a,b)) + \mathrm{ARG}(Z(a',b'))$$

A ce point du raisonnement, on peut alors démontrer toutes les propriétés algébriques attendues des arguments (celles concernant l'argument du conjugué, de l'inverse, d'un quotient). On n'en démontre qu'une seule (question suivante) qui sera d'une importance capitale pour la suite des évènements.

§. Pour la loi $\times$.

¶. On a également $\left(\mathrm{E}^{\theta \mathrm{J}}\right)^{-1} = \overline{\mathrm{E}^{\theta \mathrm{J}}}$, mais on ne demande pas de vérifier cette dernière relation.

19) Soit $Z(a,b) \in \widehat{\mathbf{C}}^*$. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ \mathrm{ARG}\left(Z(a,b)^n\right) = n\mathrm{ARG}\left(Z(a,b)\right)$

➤ Partie E - Racines carrées dans $\widehat{\mathbf{C}}$

20) Résoudre dans $\widehat{\mathbf{C}}$ l'équation $X^2 = \mathrm{I}$.‖

21) Résoudre dans $\widehat{\mathbf{C}}$ l'équation $X^2 = -\mathrm{I}$.

22) Résoudre dans $\widehat{\mathbf{C}}$ l'équation $X^4 = \mathrm{I}$.

23) Soit à présent $Z(a,b) \in \widehat{\mathbf{C}}^*$. Montrer que l'équation $X^2 = Z(a,b)$ admet exactement deux solutions dans $\widehat{\mathbf{C}}$ (*que l'on pourra appeler racines carrées de $Z(a,b)$ dans $\widehat{\mathbf{C}}$*).

24) **Application**. Déterminer les racines carrées dans $\widehat{\mathbf{C}}$ de $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, càd déterminer toutes les matrices $X \in \widehat{\mathbf{C}}$ telles que $X^2 = A$.

➤ Partie F - Equations du second degré dans $\widehat{\mathbf{C}}$

Soient A, B et C dans $\widehat{\mathbf{C}}$, avec $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

Dans cette partie on notera (E) l'équation suivante d'inconnue $X \in \widehat{\mathbf{C}}$:

$$(E) : \qquad AX^2 + BX + C = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$$

On appelle **discriminant de l'équation** (E) l'élément de $\widehat{\mathbf{C}}$ défini en posant

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

25) Etablir que l'équation (E) possède exactement deux solutions dans $\widehat{\mathbf{C}}$ lorsque $\Delta \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$; et exactement une solution dans $\widehat{\mathbf{C}}$ lorsque $\Delta = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. Dans les deux cas, on explicitera la ou les solutions.

26) **Application**. Résoudre dans $\widehat{\mathbf{C}}$ l'équation :

$$X^2 - 2\mathrm{J}X - \mathrm{J} = \mathrm{I}$$

➤ Partie G - Racines n-ièmes de l'unité dans $\widehat{\mathbf{C}}$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note :

$$\widehat{\mathbf{U}}_n = \left\{ Z(a,b) \in \widehat{\mathbf{C}} \ / \ Z(a,b)^n = \mathrm{I} \right\}$$

et on note $\widehat{\mathbf{U}}$ l'ensemble des éléments de $\widehat{\mathbf{C}}$ de module égal à 1, soit :

$$\widehat{\mathbf{U}} = \left\{ Z(a,b) \in \widehat{\mathbf{C}} \ / \ |Z(a,b)| = 1 \right\}$$

Dans les questions de cette partie, n désigne un entier naturel $n \geqslant 2$.

27) Soit n un entier naturel $n \geqslant 2$. Etablir que : $\widehat{\mathbf{U}}_n \subset \widehat{\mathbf{U}}$.

28) Etablir que $\left(\widehat{\mathbf{U}}_n, \times\right)$ est un sous-groupe de $\left(\widehat{\mathbf{U}}, \times\right)$.

‖. On cherchera donc tous les $X \in \widehat{\mathbf{C}}$ tels que $X^2 = \mathrm{I}$. Indication : on pourra utiliser une identité remarquable, et utiliser le fai que $\widehat{\mathbf{C}}$ est en particulier un anneau intègre.

29) Montrer que : $\widehat{\mathbf{U}}_n = \left\{ \mathrm{E}^{\frac{2k\pi}{n}\,\mathrm{J}} \,/\, k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!] \right\}$.

30) Montrer que : $\displaystyle\sum_{W \in \widehat{\mathbf{U}}_n} W = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

31) **Application**. Déterminer toutes les matrices $X \in \widehat{\mathbf{C}}$ telles que

$$X^4 = \begin{pmatrix} 8\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

➤ Partie H - Finalement - Bonus

On rappelle que $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des similitudes directes du plan complexe.
On note $\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C})$ la partie de $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$ constituée des similitudes directes de centre O.

32) Justifier brièvement qu'un élément de $\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C})$ est une transformation f_a ayant pour écriture complexe : $z \longmapsto az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, et que $\left(\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C}), \circ\right)$ est un groupe abélien.

33) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C}) &\longrightarrow \widehat{\mathbf{C}}^* \\ f_a &\longmapsto |a|\, \mathrm{E}^{\arg(a)\,\mathrm{J}} \end{aligned}$$

est bijective.

34) Montrer que ψ est compatible avec les structures de groupes de $\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C})$ et de $\widehat{\mathbf{C}}^*$ dans le sens où :

$$\forall (f, g) \in \mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C})^2,\ \psi(f \circ g) = \psi(f) \times \psi(g)$$

Une telle application (compatible avec les lois de groupes au départ et à l'arrivée) s'appelle un morphisme de groupes. Un morphisme de groupes bijectif est appelé un isomorphisme de groupes ; enfin deux groupes G et G' sont dits isomorphes lorsqu'il existe un morphisme de groupes entre G et G'.

Dans cette dernière question, vous avez donc établi que les groupes $\left(\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C}), \circ\right)$ et $\left(\widehat{\mathbf{C}}^*, \times\right)$ sont isomorphes. Cela signifie que non seulement il existe une correspondance bijective entre les éléments des ensembles $\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C})$ et $\widehat{\mathbf{C}}^*$, mais aussi que cette correspondance est compatible avec les LCI de ces deux groupes.

➤ Partie I - Bonus

35) Déterminer toutes les matrices $M \in \widehat{\mathbf{C}}$ telles que $(M + \mathrm{I})^5 = (M - \mathrm{I})^5$