Devoir Sur Table N°6

Polynômes & Matrices

Mercredi 20 Mars 2019

Durée : 1 heures

Exercice 1 :

1) Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Déterminer M^3 puis en déduire que M n'est pas inversible.

2) Soit A une matrice carrée d'ordre 3 vérifiant $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

   a) Montrer que A n'estpas inversible.

   b) Vérifier que $X^3 = 1 - (1-X)(1+X+X^2)$.

   c) En remarquant que X^3 est un polynôme annulateur de A, montrer que $I - A$ est inversible et calculer son inverse.

3) Montrer également que $I + A$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 2 :

Soit la suite (u_n) définie par ses trois premiers termes $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = -2$ et

la relation de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_n - 11u_{n+1} + 6u_{n+2}$

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout entier natuel n, on a $MX_n = X_{n+1}$. En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entiernaturel n.

2) a) Calculer $(M-I)(M-2I)(M-3I)$

3) a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse P^{-1}.

   b) Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $MP = PD$.

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $M^n = PD^nP^{-1}$.

   b) En déduire, pour tout entier naturel n, les coefficients de la première ligne de M^n. Donner alors l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

Corrigé

Exercice 1 :

1) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc : $\boxed{M^3 = 0}$

Or, si M était inversible, on aurait alors la relation suivante :

$$M^3 M^{-1} = 0 \times M^{-1}$$

$$M^3 M^{-1} = 0$$

$$M^2 . M . M^{-1} = 0$$

$$M^2 = 0$$

Or, on a $M^2 \neq 0$. Par conséquent, M n'est pas inversible.

2) a) Grâce à 1.), on voit qu'avec $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$, M ne peut être inversible. Dès lors, pour n'importe quelle matrice A vérifiant les propriétés $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$, A n'est pas inversible.

b) $1 - (1 - X)(1 + X + X^2) = 1 - (1 + X + X^2 - X - X^2 - X^3)$

$= 1 - (1 - X^3) = 1 - 1 + X^3 = X^3.$

On a donc bien : $\boxed{X^3 = 1 - (1 - X)(1 + X + X^2)}$

c) On note $P(X) = X^3$ un polynôme. On a alors :

$$P(A) = A^3 = 0.$$

X^3 est donc bien un polynôme annulateur de A.

Or, d'après 2. b), on sait que $X^3 = 1 - (1-X)(1+X+X^2)$.

On a donc : $A^3 = 0$

$$I - (I-A)(I+A+A^2) = 0$$

$$I = (I-A)(I+A+A^2)$$

Par conséquent, $I-A$ est bien inversible on a :

$$\boxed{(I-A)^{-1} = I+A+A^2}$$

3) Développons $(1+X)(1-X+X^2)$.

$(1+X)(1-X+X^2) = 1-X+X^2+X-X^2+X^3 = 1+X^3$

On a donc : $(I+A)(I-A+A^2) = I + A^3$

Or, on sait que $A^3 = 0$ ce qui donne :

$$(I+A)(I-A+A^2) = I.$$

$I+A$ est donc bien inversible et on a :

$$\boxed{(I+A)^{-1} = (I-A+A^2)}$$

Exercice 2 :

1) $MX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \\ 6U_n - 11U_{n+1} + 6U_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \\ U_{n+3} \end{pmatrix}$

On a donc : $\boxed{X_{n+1} = MX_n}$

Démontrons alors par récurrence la propriété $X_n = M^n X_0$.

Initialisation : pour $n = 0$ on a $X_0 = M^0 X_0 = X_0$.

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n = 0$

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $X_n = M^n X_0$.

D'après la première partie de la question on a $X_{n+1} = MX_n$.

$$X_n = M^n X_0$$
$$MX_n = M\,M^n X_0$$
$$\boxed{X_{n+1} = M^{n+1} X_0}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété $X_n = M^n X_0$ est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

2) a) $(M-I)(M-2I)(M-3I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -9 & 3 \\ 18 & -27 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc $P(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$ qui est un polynôme annulateur de M. Les valeurs propres possibles sont donc racines de ce polynôme ce qui donne :

$$\boxed{sp(M) = \{1;2;3\}}$$

b) pour $\lambda = 1$ on a $MX_1 = X_1$

$MX_1 - X_1 = 0$

$(M - I)X_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ qui donne $$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ 6x - 11y + 5z = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre $x = y = z = 1$ pour résoudre ce système.

On a donc : $\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ vecteur propre de M de valeur propre associée 1 avec $X_1 \neq 0$.

- pour $\lambda = 2$ on a $MX_2 = 2X_2$

$MX_2 - 2X_2 = 0$

$(M - 2I)X_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ qui donne $$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 6x - 11y + 4z = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre $x = 1$, $y = 2$ et $z = 4$ pour résoudre ce système.

On a donc : $\boxed{X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}$ vecteur propre de M de valeur propre associée 2 avec $X_2 \neq 0$

- pour $\lambda = 3$ on a $MX_3 = 3X_3$

$MX_3 - 3X_3 = 0$

$(M - 3I)X_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ce qui donne $$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 6x - 11y + 3z = 0 \end{cases}$$

annulateur de M. Les valeurs propres possibles sont donc racines de ce polynôme ce qui donne :

$$\boxed{sp(M) = \{1;2;3\}}$$

b) pour $\lambda = 1$ on a $MX_1 = X_1$
$MX_1 - X_1 = 0$
$(M - I)X_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ qui donne $$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ 6x - 11y + 5z = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre $x = y = z = 1$ pour résoudre ce système.

On a donc : $\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ vecteur propre de M de valeur propre associée 1 avec $X_1 \neq 0$.

- pour $\lambda = 2$ on a $MX_2 = 2X_2$
$MX_2 - 2X_2 = 0$
$(M - 2I)X_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ qui donne $$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 6x - 11y + 4z = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre $x = 1$, $y = 2$ et $z = 4$ pour résoudre ce système.

On a donc : $\boxed{X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}$ vecteur propre de M de valeur propre associée 2 avec $X_2 \neq 0$

- pour $\lambda = 3$ on a $MX_3 = 3X_3$
$MX_3 - 3X_3 = 0$
$(M - 3I)X_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ce qui donne $$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 6x - 11y + 3z = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre $x=1$, $y=3$ et $z=9$ pour résoudre ce système.

On a alors : $\boxed{X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}}$ vecteur propre de M de valeur propre associée 3 car $X_3 \neq 0$.

3/ a) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On a :
$$PQ = 2I$$
$$P\frac{1}{2}Q = I.$$

P est donc inversible et : $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}Q}$

b) $MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$

$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$

On a donc bien : $\boxed{MP = PD}$

c) D'après 3. b) on a $MP = PD$ et d'après 3. a), P est inversible. On a donc :
$$MP = PD$$
$$MPP^{-1} = PDP^{-1}$$
$$\boxed{M = PDP^{-1}}$$

M est bien diagonalisable

4. a) Procédons par récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$ on a $M^0 = PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il du rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $M^n = PD^nP^{-1}$

$$M^n = PD^nP^{-1}$$
$$M.M^n = MPD^nP^{-1}$$
$$M^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1}$$
$$M^{n+1} = PD.D^nP^{-1}$$

$$\boxed{M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

b) D'après 4. a) on a $M^n = PD^nP^{-1}$.

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6\times2^n & 8\times2^n & -2\times2^n \\ 2\times3^n & -3\times3^n & 3^n \end{pmatrix}$$

La première ligne de M est donc :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6-6\times2^n+2\times3^n & -5+8\times2^n-3\times3^n & 1-2\times2^n+3^n \end{pmatrix}$$

D'après 1), on a $X_n = M^n X_0$ donc :

$$u_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6-6\times2^n+2\times3^n & -5+8\times2^n-3\times3^n & 1-2\times2^n+3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Fin