Notations

Dans tout le problème $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites à valeurs réelles. On notera (u_n) au lieu de $(u_n)_{n\geq 0}$, toutes les suites considérées commençant à l'indice $n = 0$. On fera attention à ne pas confondre (u_n) (la suite) et u_n (le terme d'indice n de la suite). On emploiera également la notation u pour désigner la suite (u_n).

Les parties A, B, C et D ont pour thème commun l'étude des suites à l'aide des outils de l'algèbre linéaire mais elles sont, dans une large mesure, indépendantes.

A-Suite de Fibonacci

Dans cette partie, on note F le sous-ensemble de E formé des suites (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. On pose :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & F & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (u_n) & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

   Démontrer que φ est un isomorphisme. En déduire $\dim(F)$.
3. (a) Pour quelles valeurs de $q \in \mathbb{R}^*$, la suite (q^n) appartient-elle à F ? On notera q_1 et q_2 les deux valeurs trouvées.
   (b) Montrer que les suites (q_1^n) et (q_2^n) forment une base de F.
   (c) Retrouver alors l'expression du terme général de la suite de Fibonacci qui est définie comme étant la suite de F vérifiant $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

B-Deux suites récurrentes croisées

Le but de cette partie est d'expliciter les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n - 4v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 3u_n - 3v_n \end{cases}$$

On considère l'application :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x, y) & \longmapsto & (5x - 4y, 3x - 3y) \end{array}$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que $f^2 - 2f - 3\mathrm{Id} = 0$.
3. On note $G = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$ et $H = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.
   (a) Démontrer que $G \oplus H = \mathbb{R}^2$. On note p le projecteur sur G parallèlement à H et q le projecteur sur H parallèlement à G.
   (b) Démontrer que $f = 3p - q$.
   (c) Exprimer p et q comme combinaison linéaire de f et Id.
   (d) Que valent $p \circ q$ et $q \circ p$?
   (e) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = 3^n p + (-1)^n q$$

4. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de f^n en fonction de n, f et Id.
5. Donner les expressions des suites (u_n) et (v_n) en fonction de n.

C-Étude de deux endomorphismes

Dans cette partie, on étudie deux applications de E dans E :

$$T : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (u_n) & \mapsto & (u_{n+1}) \end{array} \qquad D : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (u_n) & \mapsto & (u_{n+1}-u_n) \end{array}$$

À titre d'exemple, si $u = (\sqrt{n})$ alors $T(u) = (\sqrt{n+1})$ et $D(u) = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

1. (a) Démontrer que T est un endomorphisme de E, déterminer $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.
   (b) i. Montrer que D est un endomorphisme de E.
   ii. Calculer l'image par D de chacune des suites : (n), (n^2) et (2^n).
   iii. Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$.
   iv. Soit $v = (v_n) \in E$ une suite fixée et $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe une unique suite $u = (u_n)$ telle que $u_0 = \alpha$ et $D(u) = v$. Donner l'expression de (u_n) en fonction de α et des termes de la suite v. En déduire que D est surjective.
   v. Expliciter les antécédents par D de la suite de terme général : $v_n = 3n - 1$.
   vi. Soit $u \in E$, démontrer que $D^2(u) = (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)$.
   vii. Démontrer que $\mathrm{Ker}(D^2)$ est l'ensemble des suites arithmétiques.
2. Soit F le sous-ensemble de E constitué des suites u telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+3} = 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n$$
   (a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Vérifier que $\mathrm{Ker}(D^2) \subset F$.
   (c) Soit $u \in E$, démontrer que $u \in F$ si et seulement si $D^2(u)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   (d) i. Montrer que l'ensemble des suites géométriques de raison $\dfrac{1}{4}$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1.
   ii. Montrer que l'ensemble des suites arithmétiques est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.
   iii. En appliquant le théorème du rang à l'application D^2 restreinte à F déterminer $\dim(F)$.
   iv. Déterminer les suites géométriques de premier terme égal à 1 qui sont des éléments de F.
   v. Trouver un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(D^2)$ dans F.
   vi. En déduire une description de F.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note E_k le sous-espace vectoriel de E constitué des suites périodiques de période k, c'est-à-dire des suites (u_n) vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+k} = u_n$$
   (a) Déterminer une base de E_2.
   (b) i. Montrer que $E_3 = \mathrm{Ker}(T^3 - \mathrm{Id})$.
   ii. Démontrer que : $\forall u \in E_3,\ T(u) \in E_3$.
   iii. Démontrer que $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}) \subset E_3$.
   iv. Démontrer que $\mathrm{Ker}(T^2 + T + \mathrm{Id}) \subset E_3$. Dans la suite, on note $H = \mathrm{Ker}(T^2 + T + \mathrm{Id})$.
   (c) On considère l'application :
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E_3 & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{1}{3}\Big(u_0 + u_1 + u_2\Big) \end{array}$$

i. Montrer que φ est une forme linéaire et que $\mathrm{Ker}(\varphi) = H$.
ii. Déterminer $\dim(H)$.
iii. En déduire $\dim(E_3)$.
iv. Démontrer que $G = \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id})$ et H sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E_3.
v. Donner une base de E_3.
vi. Exprimer en fonction de T la projection sur G parallèlement à H.

D-Étude d'une famille de suites récurrentes

Dans cette partie, on se propose d'étudier les suites réelles $u = (u_n)$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. La question 1. étudie le cas où P est constant, la question 2. étudie le cas où $a \neq 1$ et la question 3. le cas où $a = 1$. On s'autorisera à confondre polynôme et fonction polynomiale.

1. Dans cette question, on note $E_a = \{u \in E,\ \exists b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b\}$.

(a) Soit $u \in E_a$, démontrer l'unicité du réel b tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

Ce réel b, qui dépend de la suite u, sera noté b_u.

(b) i. Expliciter E_1.
ii. Expliciter E_0.

Dans la suite de cette question 1., a est supposé différent de 1.

(c) Montrer que E_a est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(d) Soit x la suite constante égale à 1 et y la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $y_n = a^n$. Démontrer que (x, y) est une famille libre de E_a, on précisera les valeurs de b_x et b_y.

(e) Soit $u \in E_a$.

i. Démontrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ uniques tels que :

$$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$$

ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda x_n + \mu y_n$ où λ et μ sont les réels trouvés à la question précédente.
iii. Décrire E_a, on donnera en particulier sa dimension.

2. Dans cette question 2., on fixe $a \neq 1$ et on se donne un entier naturel p. On note :

$$F_a = \{u \in E,\ \exists P \in \mathbb{R}_p[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)\}$$

(a) i. Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R}_p[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^{p+1} \\ & & P & \mapsto & (P(k))_{0 \leq k \leq p} \end{array}$$

ii. Soit $u \in F_a$, démontrer l'unicité du polynôme $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)$$

On note ce polynôme P_u puisqu'il dépend de la suite u.

(b) Montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de E.

(c) Montrer que l'application θ définie pour tout $u \in F_a$ par $\theta(u) = P_u$ est un application linéaire de F_a dans $\mathbb{R}_p[X]$.

(d) Déterminer $\mathrm{Ker}(\theta)$, on donnera sa dimension.

(e) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.

i. Quel est le degré de Q_k ?

ii. Montrer que la famille $(Q_k)_{0 \leq k \leq p}$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

iii. Soit $k \in [\![0, p]\!]$, démontrer que $Q_k \in \mathrm{Im}(\theta)$.

iv. En déduire que θ est surjective.

(f) Déduire des questions précédentes la dimension de F_a.

(g) Pour $k \in [\![0, p]\!]$, on pose $x^{(k)}$, la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n^{(k)} = n^k$ et on pose $y = (a^n)$. Montrer que $(x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(p)}, y)$ est une base de F_a.

(h) Application : déterminer la suite $u \in E$ vérifiant :

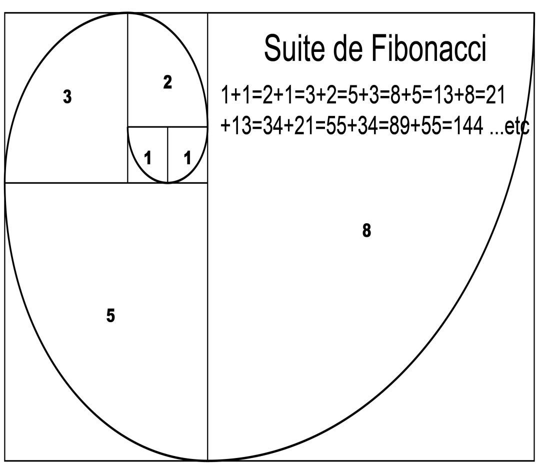
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 2n + 5 \\ u_0 = -2 \end{cases}$$

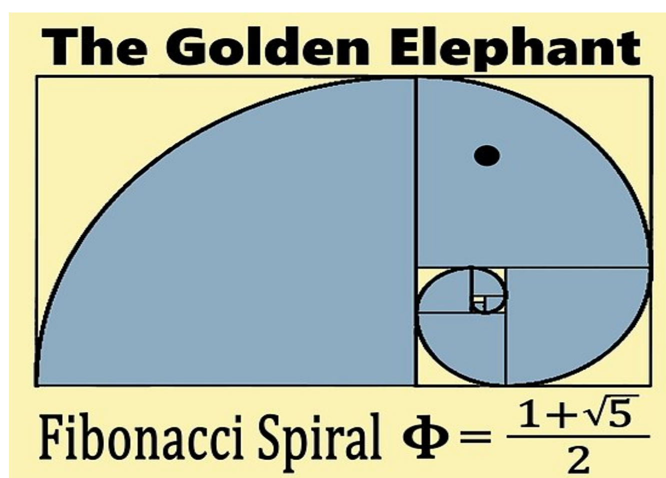
3. Dans cette question $a = 1$ et on note $G = \{u \in E,\ \exists P \in \mathbb{R}_p[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + P(n)\}$.

(a) En adaptant les résultats de la question 2., donner une base de G.

(b) Application : déterminer la suite $u \in E$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 6n + 1 \\ u_0 = -2 \end{cases}$$





A-Suite de Fibonacci

L'objectif de cette partie est de retrouver la formule de Binet qui donne le terme général de la suite de Fibonacci en fonction de n à l'aide d'outils de l'algèbre linéaire.

1. Vérifions les différentes propriétés pour avoir un sous-espace vectoriel de E.
   - Par définition de l'ensemble F, on a : $F \subset E$.
   - La suite nulle vérifie la relation de récurrence proposée.
   - Soient $(u, v) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$\lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(u_{n+1} + u_n) + (v_{n+1} + v_n) = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + (\lambda u_n + v_n)$$

   Ce qui permet d'affirmer que la suite $\lambda u + v$ vérifie également la relation de récurrence.

   $$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$$

2. - Montrons tout d'abord que l'application φ est linéaire. Soient $(u, v) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

   $$\varphi(\lambda u + v) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1) = \lambda(u_0, u_1) + (v_0, v_1) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$$

   $$\boxed{\varphi \text{ est linéaire}}$$

   - Soit $u \in \text{Ker}(\varphi)$, on a : $\varphi(u) = (u_0, u_1) = (0, 0)$. Démontrons par récurrence double sur n :

   $$\mathcal{H}_n \ : \ u_n = 0$$

   Pour l'initialisation, on a bien $u_0 = u_1 = 0$. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $u_{n+1} = u_n = 0$. On a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = 0$. On en déduit que u est la suite nulle.

   Finalement $\text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$ donc l'application φ est injective.

   - Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La suite u définie par la relation de récurrence suivante :

   $$\begin{cases} u_0 = a, \ u_1 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

   appartient à F et est un antécédent de (a, b) par φ.

   Finalement φ est une application linéaire injective et surjective :

   $$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme}}$$

   Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, l'application φ étant un isomorphisme entre F et $\mathbb{R}^2$, on en déduit que F est de dimension finie avec :

   $$\boxed{\dim(F) = 2}$$

3. (a) Soit $q \in \mathbb{R}^*$, on a :

   $$\begin{aligned} (q^n) \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ q^{n+2} = q^{n+1} + q^n \\ &\Leftrightarrow \quad q^2 = q + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } q = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

On trouve :

$$\boxed{q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

(b) Les suites (q_1^n) et (q_2^n) ne sont pas colinéaires. En effet, si tel était le cas, il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q_1^n = \lambda q_2^n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^n = \lambda$$

Ce qui est absurde car $\dfrac{q_1}{q_2} \neq 1$. On en déduit que les suites (q_1^n) et (q_2^n) forment une famille libre à deux vecteurs de F, or $\dim(F) = 2$ donc (q_1^n) et (q_2^n) forment une base de F.

$$\boxed{(q_1^n) \text{ et } (q_2^n) \text{ forment une base de } F}$$

(c) La suite de Fibonacci est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Cette suite appartient à F et d'après la question précédente on connaît une base de F donc :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$$

On détermine α et β avec les valeurs de F_0 et F_1 :

$$\begin{cases} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= -\beta \\ \alpha q_1 - \alpha q_2 &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= -\beta \\ \alpha(q_1 - q_2) &= 1 \end{cases}$$

Or $q_1 - q_2 = \sqrt{5}$, ainsi $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Ce qui donne bien la formule connue :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_1^n - q_2^n\right)}$$

B-Deux suites récurrentes croisées

1. L'application f est définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, il reste à démontrer qu'elle est linéaire. Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= (5(\lambda x + x') - 4(\lambda y + y'), 3(\lambda x + x') - 3(\lambda y + y')) \\ &= \lambda(5x - 4y, 3x - 3y) + (5x' - 4y', 3x' - 3y') \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^2}$$

2. Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f^2(u) = f(5x - 4y, 3x - 3y) = (5(5x - 4y) - 4(3x - 3y), 3(5x - 4y) - 3(3x - 3y)) = (13x - 8y, 6x - 3y)$$

$$-2f(u) = (-10x + 8y, -6x + 6y)$$

$$-3\mathrm{Id}(u) = (-3x, -3y)$$

En sommant, on obtient bien :

$$\forall u \in \mathbb{R}^2,\ f^2(u) - 2f(u) - 3u = (0, 0)$$

$$\boxed{f^2 - 2f - 3\mathrm{Id} = 0}$$

3. (a) Remarquons avant tout que G et H sont bien des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ en tant que noyaux d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$. On procède par analyse-synthèse.

   - **Analyse.** Soit $u \in \mathbb{R}^2$, on suppose que :

   $$u = u_G + u_H \quad (1) \quad \text{avec } u_G \in G \text{ et } u_H \in H$$

   On applique f :

   $$f(u) = f(u_G + u_H) = f(u_G) + f(u_H) = 3u_G - u_H \quad (2)$$

   En effet $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}) = \{v \in \mathbb{R}^2,\ f(v) = 3v\}$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) = \{v \in \mathbb{R}^2,\ f(v) = -v\}$.

   On effectue $(1) + (2)$ pour obtenir $u + f(u) = 4u_G$, c'est-à-dire $u_G = \dfrac{1}{4}(u + f(u))$. On en déduit que :

   $$u_H = u - u_G = u - \frac{1}{4}(u + f(u)) = \frac{3}{4}u - \frac{1}{4}f(u)$$

   - **Synthèse.** On a trouvé :

   $$u = \underbrace{\left(\frac{1}{4}u + \frac{1}{4}f(u)\right)}_{u_G} + \underbrace{\left(\frac{3}{4}u - \frac{1}{4}f(u)\right)}_{u_H}$$

   ► En utilisant la relation $f^2 = 2f + 3\mathrm{Id}$, on a :

$$f(u_G) = f\left(\frac{1}{4}u + \frac{1}{4}f(u)\right) = \frac{1}{4}f(u) + \frac{1}{4}f^2(u) = \frac{1}{4}f(u) + \frac{1}{4}(2f(u) + 3u) = \frac{3}{4}f(u) + \frac{3}{4}u = 3u_G$$

Ce qui démontre que $u_G \in \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$.

▶ Avec la même méthode, on a :

$$f(u_H) = f\Big(\frac{3}{4}u - \frac{1}{4}f(u)\Big) = \frac{3}{4}f(u) - \frac{1}{4}f^2(u) = \frac{3}{4}f(u) - \frac{1}{4}(2f(u) + 3u) = \frac{1}{4}f(u) - \frac{3}{4}u = -u_H$$

Ce qui démontre que $u_H \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

Ce qui termine l'analyse-synthèse et permet d'affirmer que :

$$\boxed{G \oplus H = \mathbb{R}^2}$$

(b) Soit $u \in \mathbb{R}^2$, en conservant les notations de la question précédente, on sait que :

$$p(u) = u_G = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}f(u) \text{ et } q(u) = u_H = \frac{3}{4}u - \frac{1}{4}f(u)$$

On a :

$$3p(u) - q(u) = \frac{3}{4}u + \frac{3}{4}f(u) - \Big(\frac{3}{4}u - \frac{1}{4}f(u)\Big) = f(u)$$

$$\boxed{f = 3p - q}$$

(c) Toujours avec les notations des questions précédentes, on a :

$$p(u) = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}f(u)$$

donc $p = \frac{1}{4}\mathrm{Id} + \frac{1}{4}f$.
De même :

$$q(u) = \frac{3}{4}u - \frac{1}{4}f(u)$$

ainsi $q = \frac{3}{4}\mathrm{Id} - \frac{1}{4}f$.

$$\boxed{p = \frac{1}{4}\mathrm{Id} + \frac{1}{4}f \text{ et } q = \frac{3}{4}\mathrm{Id} - \frac{1}{4}f}$$

(d) On utilise les formules obtenues à la question précédente :

$$p \circ q = \Big(\frac{1}{4}\mathrm{Id} + \frac{1}{4}f\Big) \circ \Big(\frac{3}{4}\mathrm{Id} - \frac{1}{4}f\Big) = \frac{3}{16}\mathrm{Id} - \frac{1}{16}f + \frac{3}{16}f - \frac{1}{16}f^2$$

Or $f^2 = 2f + 3\mathrm{Id}$ ainsi en poursuivant le calcul, il vient :

$$p \circ q = \frac{3}{16}\mathrm{Id} - \frac{1}{16}f + \frac{3}{16}f - \frac{1}{16}(2f + 3\mathrm{Id}) = 0$$

Le calcul pour $q \circ p$ donne le même résultat car f et Id commutent.

$$\boxed{p \circ q = q \circ p = 0}$$

(e) Il y a deux méthodes, on peut utiliser la question 3.(b), en écrivant que $f^n = (3p-q)^n$ et utiliser la formule du binôme de Newton dans l'anneau des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$, sachant que p et q commutent. Il y aura ensuite de nombreuses simplifications dans la somme puisque $p \circ q = q \circ p = 0$.

Cependant le plus simple est de démontrer le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, puisque la formule est donnée.

$$\mathcal{H}_n \ : \ f^n = 3^n p + (-1)^n q$$

• **Analyse.** Pour $n = 0$, on a $f^0 = \text{Id}$ qui est en effet égal à $p + q$.

• **Synthèse.** On suppose que $f^n = 3^n p + (-1)^n q$ et on compose par f sachant que d'après la question 3.(b), on a $f = 3p - q$.

$$f^{n+1} = f \circ f^n = (3p-q) \circ (3^n p + (-1)^n q) = 3^{n+1} p + 3 \times (-1)^n p \circ q - 3^n q \circ p + (-1)^{n+1} q = 3^{n+1} p + (-1)^{n+1} q$$

en utilisant la question 3.(d) où l'on a $p \circ q = q \circ p = 0$.
Ce qui démontre que $\mathcal{H}_n$ est vraie et achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = 3^n p + (-1)^n q}$$

4. Il reste à utiliser les formules de la question 3.(c), $p = \dfrac{1}{4}\text{Id} + \dfrac{1}{4} f$ et $q = \dfrac{3}{4}\text{Id} - \dfrac{1}{4} f$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^n = 3^n \Big(\frac{1}{4}\text{Id} + \frac{1}{4} f\Big) + (-1)^n \Big(\frac{3}{4}\text{Id} - \frac{1}{4} f\Big) = \frac{3^n + 3 \times (-1)^n}{4}\text{Id} + \frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4} f$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = \frac{3^n + 3 \times (-1)^n}{4}\text{Id} + \frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4} f}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, on remarque que $f(u_n, v_n) = (5u_n - 4v_n, 3u_n - 3v_n) = (u_{n+1}, v_{n+1})$. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{H}_n \ : \ (u_n, v_n) = f^n(u_0, v_0)$$

• **Initialisation.** La formule est vraie au rang 0 puisque $f^0 = \text{Id}$.

• **Hérédité.** On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$(u_{n+1}, v_{n+1}) = f(u_n, v_n) = f(f^n(u_0, v_0)) = f^{n+1}(u_0, v_0)$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.

Il reste à utiliser la formule trouvée à la question précédente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
(u_n, v_n) &= f^n(u_0, v_0) \\
&= \frac{3^n + 3 \times (-1)^n}{4}(u_0, v_0) + \frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4} f(u_0, v_0) \\
&= \frac{3^n + 3 \times (-1)^n}{4}(u_0, v_0) + \frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4}(5u_0 - 4v_0, 3u_0 - 3v_0) \\
&= \frac{3^n + 3 \times (-1)^n}{4}(1, 0) + \frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4}(5, 3) \\
&= \Big(\frac{2 \times 3^{n+1} + 2 \times (-1)^{n+1}}{4}, \frac{3^{n+1} + 3 \times (-1)^{n+1}}{4}\Big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2 \times 3^{n+1} + 2 \times (-1)^{n+1}}{4} \text{ et } v_n = \frac{3^{n+1} + 3 \times (-1)^{n+1}}{4}}$$

C-Étude de deux endomorphismes

1. (a) Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$T(\lambda u + v) = T((\lambda u_n + v_n)) = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) = \lambda(u_{n+1}) + (v_{n+1}) = \lambda T(u) + T(v)$$

De plus T va de E dans E :

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E}$$

Soit $u \in E$, on a :

$$u \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow T(u) = 0_E \Leftrightarrow (u_{n+1}) = 0_E \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 0$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(T) = \{(u_n) \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 0\}}$$

L'application T est surjective, en effet si $v = (v_n) \in E$, on définit la suite $u = (u_n)$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = v_{n-1} \end{cases}$$

Nous avons $T(u) = v$.

$$\boxed{\mathrm{Im}(T) = E}$$

On remarque que T est un endomorphisme surjectif et non injectif, ce n'est pas contradictoire avec le cours puisque E n'est pas de dimension finie.

(b) i. L'application D va de E dans E, de plus $D = T - \mathrm{Id}$ où Id désigne l'application identité de E dans E. Ainsi, il est clair que :

$$\boxed{D \text{ est un endomorphisme de } E}$$

ii. • $D((n)) = ((n+1) - n) = (1)$.
• $D((n^2)) = ((n+1)^2 - n) = (2n+1)$.
• $D((2^n)) = (2^{n+1} - 2^n) = (2^n)$.

iii. Soit $u \in E$, on a :

$$u \in \mathrm{Ker}(D) \Leftrightarrow D(u) = 0_E \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(D) \text{ est l'ensemble des suites constantes}}$$

iv. On cherche une suite u telle que :

$$\begin{cases} D(u) = v \\ u_0 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = v_n \\ u_0 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ u_0 = \alpha \end{cases}$$

Cette relation permet de définir une suite (u_n) de façon unique. En effet u_0 est imposé et si l'on suppose connaître u_n pour un certain entier naturel n fixé alors u_{n+1} est déterminé de manière unique.
Il reste à donner une expression de la suite u en fonction de la suite v. Par télescopage, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k$$

On en déduit que D est une application surjective puisque toute suite v possède un antécédent par D.

$$\boxed{D \text{ est surjective}}$$

Plus précisément, il y a une infinité d'antécédents puisque α peut être choisi arbitrairement.

v. On reprend la formule trouvée dans la question précédente. Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$, un antécédent de la suite $(3n-1)$ par D est la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \alpha + \sum_{k=0}^{n-1}(3k-1) = \alpha + 3\frac{n(n-1)}{2} - n = \alpha + \frac{n(3n-5)}{2}$$

$$\boxed{\text{Les antécédents de la suite } (3n-1) \text{ par } D \text{ sont les suites } \left(\alpha + \frac{n(3n-5)}{2}\right) \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}}$$

vi. Procédons par étapes, on pose $v = D(u)$. Par définition de D, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (u_{n+1} - u_n)$. Ainsi :

$$D^2(u) = D(D(u)) = D(v) = (v_{n+1} - v_n) = (u_{n+2} - u_{n+1} - u_{n+1} + u_n) = (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)$$

$$\boxed{\forall u \in E,\ D^2(u) = (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)}$$

vii. Nous avons vu à la question (c) que $\mathrm{Ker}(D)$ est l'ensemble des suites constantes, on a :

$$\begin{array}{rcl} u \in \mathrm{Ker}(D^2) & \Leftrightarrow & D^2(u) = 0_E \\ & \Leftrightarrow & D(u) \text{ est une suite constante} \\ & \Leftrightarrow & \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = a \\ & \Leftrightarrow & u \text{ est une suite arithmétique} \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(D^2) \text{ est l'ensemble des suites arithmétiques}}$$

2. (a) • $F \subset E$ par définition de F.
• La suite nulle vérifie la relation caractérisant les éléments de F.
• Soit $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $w = \lambda u + v = \lambda(u_n) + (v_n) = (\lambda u_n + v_n)$:

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N},\ 4w_{n+3} & = & 4\lambda u_{n+3} + v_{n+3} \\ & = & \lambda(9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n) + (9v_{n+2} - 6v_n + v_n) \\ & = & 9(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) - 6(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + (\lambda u_n + v_n) \\ & = & 9w_{n+2} - 6w_{n+1} + w_n \end{array}$$

Ainsi la suite w vérifie la relation qui caractérise les éléments de F.

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$$

(b) D'après la question 1.(b)vi., $\mathrm{Ker}(D^2)$ est l'ensemble des suites arithmétiques. Soit u une suite arithmétique, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout entier naturel n, $u_n = an + b$.

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N},\ 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n & = & 9(a(n+2)+b) - 6(a(n+1)+b) + an + b \\ & = & 4an + 12a + 4b \\ & = & 4(a(n+3)+b) \\ & = & 4u_{n+3} \end{array}$$

Ceci démontre qu'une suite arithmétique vérifie la relation qui caractérise les éléments de F :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(D^2) \subset F}$$

(c) Soit $u \in E$ et $w = D^2(u)$. D'après la question 1.(b)v., on a pour tout entier naturel n $w_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u \in F & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+3} = 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n \\ & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ 4(u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1}) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \\ & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{4} w_n \end{array}$$

Ce qui démontre l'équivalence souhaitée :

$$\boxed{u \in F \text{ si et seulement si } D^2(u) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{4}}$$

(d) i. Une suite u est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ si et seulement si :

$$\exists \beta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \beta$$

On note t la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Ainsi l'ensemble des suites géométriques de raison $\dfrac{1}{4}$ est égal à $\mathrm{Vect}(t)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des suites géométriques de raison } \frac{1}{4} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{ de dimension } 1}$$

ii. Notons r et s les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = n \text{ et } s_n = 1$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} u \text{ est une suite arithmétique} & \Leftrightarrow & \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = an + b \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ u = ar + bs \\ & \Leftrightarrow & u \in \mathrm{Vect}(r,s) \end{array}$$

D'autre part les suites r et s ne sont clairement pas proportionnelles, ainsi $\dim(\mathrm{Vect}(r,s)) = 2$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des suites arithmétiques est un sous-espace vectoriel de } E \text{ de dimension } 2}$$

iii. Notons f l'application D^2 restreinte à F. D'après la question 2.(c)., l'image de f est l'ensemble des suites géométriques de raison $\dfrac{1}{4}$. D'autre part, le noyau de f est l'ensemble des suites arithmétiques puisque les suites arithmétiques forment un sous-espace vectoriel de F, d'après la question 2. D'après le théorème du rang et les dimensions trouvées aux deux questions précédentes, on a :

$$\dim(F) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 + 1 = 3$$

$$\boxed{\dim(F) = 3}$$

iv. Soit $r \in \mathbb{R}^*$, la suite (r^n) est un élément de F si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 4r^{n+3} - 9r^{n+2} + 6r^{n+1} - r^n = 0$$

Ceci équivaut à :

$$4r^3 - 9r^2 + 6r - 1 = 0$$

Cette équation possède 1 comme solution, on factorise par $r - 1$ et on trouve :

$$4r^3 - 9r^2 + 6r - 1 = 4(r-1)^2\Big(r - \frac{1}{4}\Big)$$

$$\boxed{\text{Les suites géométriques de premier terme égal à 1 qui sont des éléments de } F \text{ sont } (1) \text{ et } \left(\frac{1}{4^n}\right)}$$

v. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(D^2)$ est de dimension 2 tandis que F est de dimension 3, ainsi il s'agit de chercher une droite vectorielle comme supplémentaire. Prenons la suite $t = \left(\dfrac{1}{4^n}\right)$ qui est un élément de F, d'après la question précédente, mais qui n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(D^2)$.
Démontrons que $\mathrm{Ker}(D^2) \oplus \mathrm{Vect}(t) = F$.
• Déjà $\dim(\mathrm{Ker}(D^2)) + \dim(\mathrm{Vect}(t)) = 2 + 1 = 3 = \dim(F)$.
• D'autre part si $u \in \mathrm{Ker}(D^2) \cap \mathrm{Vect}(t)$, on a : u qui s'écrit λt où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $D^2(u) = 0_E$. Avec l'expression de D^2 trouvée à la question 2.(e) de la partie A, il vient :

$$D^2(u) = (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) = \Big(\lambda\frac{1}{4^{n+2}} - 2\lambda\frac{1}{4^{n+1}} + \lambda\frac{1}{4^n}\Big) = \lambda\Big(\frac{1}{4^n}\Big(\frac{1}{16} - 2\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big)\Big) = \frac{-3\lambda}{16}t = 0_E$$

Cette égalité est vérifiée si et seulement si $\lambda = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(D^2) \cap \mathrm{Vect}(t) = \{0_E\}$.
Les deux conditions sont réunies pour que :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(D^2) \oplus \mathrm{Vect}(t) = F}$$

vi. D'après la question précédente, tout élément de F s'écrit de façon unique comme somme d'une suite arithmétique et d'un multiple de la suite $\left(\dfrac{1}{4^n}\right)$.

$$\boxed{F = \Big\{(u_n) \in E,\ \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = an + b + \frac{c}{4^n}\Big\}}$$

3. (a) Notons r et s les suites définies par :

$$\left\{\begin{array}{l} r_n = 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ r_n = 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} s_n = 1 \text{ si } n \text{ est impair} \\ r_n = 0 \text{ si } n \text{ est pair} \end{array}\right.$$

Ces deux suites appartiennent à E_2 et ne sont pas colinéaires.
Une suite u est périodique, de période 2, si et seulement s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{l} u_n = a \text{ si } n \text{ est pair} \\ u_n = b \text{ si } n \text{ est impair} \end{array}\right.$$

Ainsi u s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de r et s puisque $u = ar + bs$.

$$\boxed{(r, s) \text{ est une base de } E_2}$$

(b) i. Soit $u \in E$, on a $T^3(u) = (u_{n+3})$. Ainsi :

$$u \in E_3 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_n \Leftrightarrow T^3(u) = u \Leftrightarrow T^3(u) - u = 0_E \Leftrightarrow u \in \operatorname{Ker}(T^3 - \operatorname{Id})$$

$$\boxed{E_3 = \operatorname{Ker}(T^3 - \operatorname{Id})}$$

ii. Soit $u \in E_3$ démontrons que $T(u) = (u_{n+1}) \in E_3$. Cette dernière égalité est vérifiée puisque u est périodique de période 3 donc pour tout entier naturel n : $u_{n+3} = u_n$, ce qui implique en particulier que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+4} = u_{n+1}$$

Ainsi (u_{n+1}) est périodique, de période 3.

$$\boxed{E_3 \text{ est stable par } T}$$

iii. Soit $u \in \operatorname{Ker}(T - \operatorname{Id})$, cela signifie que $T(u) = u$, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n$. Cela implique évidemment que pour tout entier naturel n : $u_{n+3} = u_n$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}(T - \operatorname{Id}) \subset E_3}$$

iv. Soit $u \in \operatorname{Ker}(T^2 + T + \operatorname{Id})$, on a $T^2(u) + T(u) + u = 0$. C'est-à-dire que pour tout entier naturel n : $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$. Ainsi pour tout entier naturel n :

$$u_{n+3} = -u_{n+2} - u_{n+1} = -(-u_{n+1} - u_n) - u_{n+1} = u_n$$

Ce qui démontre que $u \in E_3$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}(T^2 + T + \operatorname{Id}) \subset E_3}$$

(c) i. Démontrons que φ est linéaire. Soient u et v deux éléments de E_3 et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(\lambda u + v) = \frac{1}{3}\Big((\lambda u_0 + v_0) + (\lambda u_1 + v_1) + (\lambda u_2 + v_2)\Big) = \lambda\frac{1}{3}(u_0 + u_1 + u_2) + \frac{1}{3}(v_0 + v_1 + v_2) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$$

De plus φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire}}$$

Pour démontrer cette égalité entre ensembles, on procède par double inclusion.
• Soit $u \in \text{Ker}(T^2 + T + \text{Id})$, on a vu que cela signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$$

En particulier $u_0 + u_1 + u_2 = 0$ ainsi $\varphi(u) = 0$. Ceci démontre que $\text{Ker}(T^2 + T + \text{Id}) \subset \text{Ker}(\varphi)$.
• Soit $u \in \text{Ker}(\varphi)$, on a : $u_0 + u_1 + u_2 = 0$. Or la suite u appartient à E_3, ce qui signifie que pour tout entier naturel n : $u_{n+3} = u_n$. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{H}_n\ :\ u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$$

- L'initialisation est acquise par hypothèse.
- Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$. On a :

$$u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} = u_n + u_{n+2} + u_{n+1} = (-u_{n+2} - u_{n+1}) + u_{n+2} + u_{n+1} = 0$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et achève la récurrence.
Finalement pour tout entier naturel n : $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$, c'est-à-dire que $u \in \text{Ker}(T^2 + T + \text{Id})$. Ce qui démontre que $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(T^2 + T + \text{Id})$.

$$\boxed{\text{Ker}(\varphi) = H}$$

ii. Soit $u \in H$, on a vu dans la question 2.(d) que u est périodique de périodique 3 et de plus pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$. Ainsi, connaître u_0 et u_1 suffit à définir de façon unique la suite u puisque $u_2 = -u_1 - u_0$ et les termes suivants se déduisent par 3-périodicité. Plus précisément $u = u_0 p + u_1 q$ où les suites p et q sont définies par :

$$\begin{cases} p_0 = 1,\ p_1 = 0,\ p_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+3} = p_n \end{cases} \qquad \begin{cases} q_0 = 0,\ q_1 = 1,\ q_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+3} = q_n \end{cases}$$

Ceci démontre que $H = \text{Vect}(p, q)$. De plus p et q ne sont clairement pas colinéaires. Finalement (p, q) est une base de H et :

$$\boxed{\dim(H) = 2}$$

iii. Il s'agit d'appliquer le théorème du rang, E_3 étant de dimension finie (cela se démontre comme pour E_2) :

$$\dim(E_3) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi))$$

Or φ est une forme linéaire non nulle, elle est surjective d'où $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 1$. D'autre part, $\text{Ker}(\varphi) = H$ qui est de dimension 2 d'après la question précédente. On obtient :

$$\boxed{\dim(E_3) = 3}$$

iv. Nous avons déjà vu à la question 2.(c) que $\mathrm{Ker}(T-\mathrm{Id})$ est égal à l'ensemble des suites constantes. Ce sous-espace vectoriel est de dimension 1 puisqu'il est égal à $\mathrm{Vect}((1))$.

Ce qui démontre que $\underline{\dim(G)+\dim(H)=3=\dim(E_3)}$. Il reste à vérifier que $G\cap H=\{0_E\}$. Soit $u\in G\cap H$.

- Comme $u\in G$, u est une suite constante.
- Comme $u\in H=\mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $u_0+u_1+u_2=0$.

Étant donné que u est constante pour tout entier naturel n : $u_n=u_0$. Ainsi $3u_0=0$ d'où $u_0=0$ et par suite $u=0_E$. Ceci démontre que $\underline{G\cap H=\{0_E\}}$. Les propriétés soulignées suffisent à affirmer que :

$$\boxed{G\oplus H=E_3}$$

v. D'après la question précédente, une base de E_3 est obtenue par la concaténation d'une base de H, que nous avons déterminée à la question 3.(b), et d'une base de G.

$$\boxed{\text{Une base de } E_3 \text{ est } ((1),p,q)}$$

vi. Soit $u\in E_3$ que l'on écrit sous la forme $u=v+w$ avec $v\in G$ et $w\in H$. Notons Γ la projection sur G parallèlement à H. D'après le cours, nous avons : $\Gamma(u)=v$. Explicitons cela pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2}+u_{n+1}+u_n=(v_{n+2}+v_{n+1}+v_n)+(w_{n+2}+w_{n+1}+w_n)=3v_n$$

Ceci en utilisant le fait que pour tout entier naturel n : $w_{n+2}+w_{n+1}+w_n=0$ puisque w appartient à H et le fait que v est une suite constante. On en déduit que $\Gamma(u)=\dfrac{1}{3}\Big(u+T(u)+T^2(u)\Big)$.

$$\boxed{\Gamma=\frac{1}{3}\Big(\mathrm{Id}+T+T^2\Big)}$$

D-Étude d'une famille de suites récurrentes

1. (a) Soit $u\in E_a$. Le réel b est déterminé de manière unique par la donnée de la suite u car $b=u_1-au_0$.

$$\boxed{\text{Le réel } b \text{ est unique}}$$

(b) i. L'ensemble E_1 est constitué des suites qui vérifient :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+b \text{ où } b \text{ est un réel fixé}$$

$$\boxed{E_1 \text{ est l'ensemble des suites arithmétiques}}$$

ii. L'ensemble E_0 est constitué des suites qui vérifient :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=b \text{ où } b \text{ est un réel fixé}$$

$$\boxed{E_0 \text{ est l'ensemble des suites constantes à partir du rang 1}}$$

(c) Montrons que E_a est un sous-espace vectoriel de E.

- On a $E_a \subset E$.
- La suite nulle appartient à E_a, en prenant $b = 0$.
- Soient $(u, v) \in E_a^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda u_{n+1} + v_{n+1} = \lambda(au_n + b_u) + (av_n + b_v) = a(\lambda u_n + v_n) + \lambda b_u + b_v$$

Ce qui permet d'affirmer que la suite $\lambda u + v$ appartient à E_a avec $b_{\lambda u+v} = \lambda b_u + b_v$.

$$\boxed{E_a \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$$

(d) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on suppose que $\lambda x + \mu y = 0$, démontrons que $\lambda = \mu = 0$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda + \mu a^n = 0$$

En particulier pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + a\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

ceci en utilisant l'hypothèse $a \neq 1$. Nous venons de démontrer que la famille (x, y) est libre dans E, de plus ces suites appartiennent à E_a car :

$$1 = a.1 + (1 - a) \text{ donc } b_x = 1 - a$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a^{n+1} = a.a^n + 0 \text{ donc } b_y = 0$$

$$\boxed{(x, y) \text{ est une famille libre de } E_a}$$

(e) i. On a :

$$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda + a\mu = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{au_0 - u_1}{a - 1} \\ \mu = \dfrac{u_1 - u_0}{a - 1} \end{cases}$$

Ce qui démontre l'existence et l'unicité des réels λ et μ.

ii. La suite $u \in E_a$ ainsi $u_1 = au_0 + b_u$ donc :

$$b_u = u_1 - au_0 = \lambda x_1 + \mu y_1 - a(\lambda x_0 + \mu y_0) = \lambda(x_1 - ax_0) + \mu(y_1 - ay_0) = \lambda b_x + \mu b_y$$

$$\boxed{b_u = \lambda b_x + \mu b_y}$$

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n\ :\ u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

- **Initialisation.** D'après la question précédente, on a $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ qui sont vraies.

- **Hérédité.** On fixe $n \in \mathbb{N}$ et l'on suppose que $u_n = \lambda x_n + \mu y_n$. On sait que la suite u appartient à E_a ainsi :

$$u_{n+1} = au_n + b_u = a(\lambda x_n + \mu y_n) + b = a(\lambda x_n + \mu y_n) + \lambda b_x + \mu b_y = \lambda(ax_n + b_x) + \mu(ay_n + b_y) = \lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1}$$

Ce qui termine la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda x_n + \mu y_n}$$

iii. Nous avons démontré lors de la question précédente que toute suite $u \in E_a$ s'écrit comme combinaison linéaire de x et y : la famille (x, y) est une famille génératrice de E_a. D'après la question 1.(e).i., c'est également une famille libre, on en déduit que :

$$\boxed{(x, y) \text{ est une base de } E_a \text{ et } \dim(E_a) = 2}$$

On peut écrire :

$$\boxed{E_a = \{u \in E,\ \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda + \mu a^n\}}$$

2. (a) i. Démontrons tout d'abord que l'application φ est linéaire. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_p[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(\lambda P + Q) = ((\lambda P + Q)(k))_{0 \le k \le p} = \lambda(P(k))_{0 \le k \le n} + (Q(k))_{0 \le k \le p} = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

$$\boxed{\varphi \text{ est linéaire}}$$

Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, on a : $P(k) = 0$. Le polynôme P est de degré au plus p et possède $p + 1$ racines : c'est le polynôme nul. On en déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et par suite φ est injective.

D'autre part, $\dim(\mathbb{R}_p[X]) = \dim(\mathbb{R}^{p+1}) = p + 1$, une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension est bijective.

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme}}$$

ii. On se donne deux polynômes $(P, Q) \in \mathbb{R}_p[X]^2$ qui répondent à la question, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n) = au_n + Q(n)$$

Ainsi pour tout $i \in [\![0, p]\!],\ P(i) = u_{i+1} - au_i = Q(i)$, c'est-à-dire que $\varphi(P) = \varphi(Q)$: on en déduit que $P = Q$.

$$\boxed{\forall u \in F_a,\ \exists! P_u \in \mathbb{R}_p[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)}$$

(b) Vérifions les propriétés requises pour avoir un sous-espace vectoriel de E :

- $F_a \subset E$.
- La suite nulle appartient à F_a en prenant $P = 0$.
- Soient u et v deux suites de F_a et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lambda u_{n+1} + v_{n+1} = \lambda(au_n + P_u(n)) + av_n + P_v(n) = a(\lambda u_n + v_n) + (\lambda P_u(n) + P_v(n))$$

Ce calcul permet d'affirmer que la suite $\lambda u + v$ appartient à E en démontrant au passage que $P_{\lambda u+v} = \lambda P_u + P_v$ en utilisant l'unicité démontrée à la question précédente.

$$\boxed{F_a \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$$

(c) Déjà l'application θ est correctement définie car pour toute suite $u \in F_a$, il y a un unique polynôme P_u associé. Soient $(u, v) \in F_a^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a vu à la question précédente que $P_{\lambda u+v} = \lambda P_u + P_v$, c'est-à-dire que $\theta(\lambda u + v) = \lambda\theta(u) + \theta(v)$.

$$\boxed{\theta \text{ est linéaire}}$$

(d) Soit $u \in \text{Ker}(\theta)$, on a : $\theta(u) = P_u = 0$, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n$$

On sait alors que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n u_0$. On a démontré que :

$$\boxed{\text{Ker}(\theta) = \text{Vect}((a^n)) \text{ et } \dim(\text{Ker}(\theta)) = 1}$$

(e) i. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$Q_k = (X+1)^k - aX^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - aX^k = (1-a)X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$$

D'après l'énoncé, on a $a \neq 1$, on en déduit que :

$$\boxed{\deg(Q_k) = k}$$

ii. D'après la question précédente, la famille $(Q_k)_{0 \leq k \leq p}$ est de degrés échelonnés donc c'est une famille libre de $\mathbb{R}_p[X]$. Son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_p[X]$, on en déduit que :

$$\boxed{(Q_i)_{0 \leq k \leq p} \text{ est une base de } \mathbb{R}_p[X]}$$

iii. Soit $k \in [\![0, p]\!]$ et u la suite de terme général : $u_n = n^k$. C'est une suite de F_a car pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = (n+1)^k = an^k + (n+1)^k - an^k = au_n + Q_k(n)$$

On a bien $\theta(u) = Q_k$ donc :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, p]\!],\ Q_k \in \text{Im}(\theta)}$$

iv. D'après les questions ii. et iii., on a $\mathbb{R}_p[X] = \text{Vect}((Q_k)_{0 \leq k \leq p}) \subset \text{Im}(\theta)$. De plus $\text{Im}(\theta) \subset \mathbb{R}_p[X]$ par définition de l'application linéaire θ. On en déduit que $\text{Im}(\theta) = \mathbb{R}_p[X]$.

$$\boxed{\theta \text{ est surjective}}$$

(f) *On a envie d'appliquer le théorème du rang pour en déduire la dimension de F_a mais à ce stade de l'étude on ne sait pas si F_a est de dimension finie.*

Montrons d'abord que F_a est de dimension finie. Par l'absurde, si F_a n'est pas de dimension finie, il est possible de trouver une famille libre de F_a de cardinal arbitrairement grand, par exemple de cardinal $p+3$. Notons F'_a le sous-espace vectoriel engendré par cette famille de vecteurs, on a : $\dim(F'_a) = p+3$. On considère l'application $\theta_{|_{F'_a}}$, on a $\text{Im}(\theta_{|_{F'_a}}) \subset \text{Im}(\theta)$ d'où :

$$\dim(\text{Im}(\theta_{|_{F'_a}})) \leq p+1$$

On a également $\text{Ker}(\theta_{|_{F'_a}}) = \text{Ker}(\theta) \cap F'_a \subset \text{Ker}(\theta)$ d'où :

$$\dim(\text{Ker}(\theta_{|_{F'_a}})) \leq 1$$

On applique le théorème du rang à $\theta_{|_{F'_a}}$, l'espace vectoriel F'_a étant bien de dimension finie :

$$p+2 \geq \dim(\mathrm{Ker}(\theta_{|_{F'_a}})) + \dim(\mathrm{Im}(\theta_{|_{F'_a}})) = \dim(F'_a) = p+3$$

C'est absurde donc F_a est bien de dimension finie et on peut appliquer le théorème du rang à θ :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\theta)) + \dim(\mathrm{Im}(\theta)) = \dim(F_a) = 1 + (p+1)$$

$$\boxed{\dim(F_a) = p+2}$$

(g) Soit $k \in [\![0, p]\!]$, on a vu dans la question (e)iii. que $x^{(k)}$ appartient à F_a avec $\theta(x^{(k)}) = Q_k$.
Nous avons vu également dans la question (d) que $y \in F_a$ avec $\theta(y) = 0$. Les $p+2$ suites proposées appartiennent à F_a, or $\dim(F_a) = p+2$, il suffit de démontrer que la famille est libre.
Soient $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq p+1} \in \mathbb{R}^{p+2}$, on suppose que :

$$\sum_{k=0}^{p} \lambda_k x^{(k)} + \lambda_{n+1} y = 0$$

On applique θ pour obtenir :

$$\sum_{k=0}^{p} \lambda_k \theta(x^{(k)}) + \lambda_{n+1}\theta(y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} \lambda_k Q_k = 0$$

Or la famille $(Q_k)_{0 \leq k \leq p}$ est une famille libre d'après la question (e)ii., on en déduit que : $\forall k \in [\![0, p\,]\!],\ \lambda_k = 0$.
On obtient alors $\lambda_{n+1} y = 0$, y n'étant pas la suite nulle, cela donne : $\lambda_{n+1} = 0$. La famille $((x^{(k)})_{0 \leq k \leq p}, y)$ est une famille libre de F_a par cardinalité :

$$\boxed{((x^{(k)})_{0 \leq k \leq p}, y) \text{ est une base de } F_a}$$

(h) Dans cet exemple, on a $a = 2$ et $p = 1$ puisque le polynôme $-X+5$ appartient à $\mathbb{R}_1[X]$. D'après la question précédente, une base de F_2 est $((1), (n), (2^n))$. Ainsi, il existe des scalaires uniques $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha + \beta n + \gamma 2^n$$

Il reste à trouver α, β et γ avec les premiers termes de la suite. On a $u_0 = -2$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 5$ d'où :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = -2 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 - \gamma \\ \beta + \gamma = 3 \\ 2\beta + 3\gamma = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 - \gamma \\ \beta = 3 - \gamma \\ \gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -3 + 2n + 2^n}$$

3. (a) On reprend les questions (a), (b), (c) et (d) de la question 2 en notant qu'ici $\mathrm{Ker}(\theta) = \mathrm{Vect}(y)$ où y est la suite constante égale à 1.

Par contre, nous devons modifier la famille de polynômes $(Q_k)_{0 \leq k \leq p}$ pour avoir une base de $\mathbb{R}_p[X]$ puisque dans la question 2.(e)ii., on utilisait $a \neq 1$. Pour $k \in [\![0, p]\!]$, on pose $Q_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$, on a alors $\theta((n^{k+1})) = Q_k$ et $(n^{k+1}) \in G$. On en déduit de même que θ est surjective et $\mathrm{Im}(\theta) = \mathbb{R}_p[X]$ et par suite on a également : $\dim(G) = p+2$

Comme dans la question 2.(g), on a la famille $((n), (n^2), ..., (n^{p+1}), (1))$ qui est une base de G.

(b) Dans cette application, on a $p = 1$. D'après la question précédente, il existe des uniques coefficients réels (α, β, γ) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha + \beta n + \gamma n^2$$

Il reste à trouver α, β et γ avec les premiers termes de la suite. On a $u_0 = -2$, $u_1 = -1$ et $u_2 = -6$ d'où :

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ \alpha + \beta + \gamma = -1 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \beta + 2\gamma = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 4 \\ \gamma = -3 \end{cases}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -2 + 4n - 3n^2}$$