Simulation

L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, il vous est demandé de souligner les résultats obtenus. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note.

Problème 1

Dans cet exercice, on se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. L'objectif est d'étudier l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P'' - XP' \end{array}$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) i. Soit $k \in \mathbb{N}$, expliciter $f(X^k)$.
   ii. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Donner le degré de $f(P)$ et son coefficient dominant, en fonction de ceux de $P \in \mathbb{R}[X]$. On pourra écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $(a_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ et utiliser la question précédente.
   (c) Déterminer le noyau de l'application f.
   (d) L'application f est-elle surjective ? On ne demande pas de trouver $\operatorname{Im}(f)$.
2. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit pair si et seulement si ses coefficients de degré impair sont nuls. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit impair si et seulement si ses coefficients de degré pair sont nuls. On note $\mathcal{P}_X$ l'ensemble des polynômes pairs et $\mathcal{I}_X$ l'ensemble des polynômes impairs.
   (a) Démontrer que : $P(-X) = P(X) \Leftrightarrow P \in \mathcal{P}_X$.
   (b) Démontrer que : $P(-X) = -P(X) \Leftrightarrow P \in \mathcal{I}_X$.
   (c) Montrer que $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{I}_X$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$.
   (d) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{I}_X$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
   (e) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{I}_X$ sont stables par f.
3. On considère la restriction de f au sous-espace vectoriel $\mathcal{I}_X$ que l'on note g. C'est-à-dire que :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathcal{I}_X & \to & \mathcal{I}_X \\ P & \mapsto & P'' - XP' \end{array}$$

   (a) Justifier que g est correctement définie et que c'est un endomorphisme de $\mathcal{I}_X$.
   (b) Déterminer le noyau de g.
   (c) Démontrer que g est surjective.
   (d) Justifier que l'application g est un automorphisme de $\mathcal{I}_X$. Déterminer les images par g^{-1} de X, X^3 et X^5.
4. On va chercher dans cette question à expliciter l'image de l'application f. On définit une suite de réels (λ_k) et on pose :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k P^{(k)}(0) \end{array}$$

   (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, justifier que le réel $\varphi(P)$ est bien défini.
   (b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer $\varphi(P)$ en fonction des coefficients de P.
   (c) Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(d) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

i. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée k-ième de $f(P)$ en fonction des dérivées successives de P.

ii. En déduire une expression du réel $\varphi \circ f(P)$.

iii. Démontrer que : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N},\ \varphi \circ f(X^i) = 0$.

iv. Montrer que la condition de la question précédente se traduit par une relation de récurrence portant sur la suite (λ_k) que l'on explicitera.

v. En déduire que le noyau de φ contient l'image de f si et seulement si $\forall i \in \mathbb{N},\ \lambda_{2i+1} = 0$ et $\lambda_{2i} = \dfrac{\lambda_0}{2^i i!}$.

(e) En déduire que $\mathrm{Im}(f) = \left\{P \in \mathbb{R}[X],\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(2k)}(0)}{2^k k!} = 0\right\}$.

Problème 2 : Matrices magiques

Dans tout le problème n est un entier supérieur ou égal à 2. On note, pour abréger, $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{SM}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices $A = (a_{ij})$ vérifiant :

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{j=1}^{n} a_{lj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}$$

Autrement dit, la somme des coefficients d'une ligne ou d'une colonne quelconque est constante, on notera $D(A)$ cette valeur constante pour $A \in \mathcal{SM}_n$. Les éléments de $\mathcal{SM}_n$ sont appelés les matrices semi-magiques.

On note $\mathcal{MG}_n$ le sous-ensemble $\mathcal{SM}_n$ constitué des matrices $A = (a_{ij})$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i} = D(A)$$

Ce qui signifie que la somme des coefficients diagonaux et la somme des coefficients antidiagonaux sont aussi égales à cette constante. Les éléments de $\mathcal{MG}_n$ sont appelés les matrices magiques.

On note I_n la matrice identité de taille n et J_n la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

A-Calcul des dimensions de $\mathcal{SM}_n$ et $\mathcal{MG}_n$

1. Démontrer que $\mathcal{SM}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ et vérifier que $I_n \in \mathcal{SM}_n$.
2. On définit l'application : $\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathcal{SM}_n & \to & \mathcal{M}_{n-1} \\ & & A & \mapsto & A_{nn} \end{array}$ où A_{nn} désigne la matrice obtenue à partir de A en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne ; ainsi A_{nn} est bien de taille $n-1$.
   (a) Vérifier que φ est linéaire.
   (b) Expliciter $\mathrm{Ker}(\varphi)$, on montrera notamment que $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1$ et on donnera une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   (c) Démontrer que φ est surjective.
   (d) En déduire la dimension de $\mathcal{SM}_n$.
3. Démontrer que $\mathcal{MG}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{SM}_n$ et vérifier que $J_n \in \mathcal{MG}_n$.
4. Pour $n = 2$, déterminer complètement $\mathcal{SM}_n$ et $\mathcal{MG}_n$ en précisant les dimensions.

5. Pour $n \geq 3$, on considère l'application :
$$\begin{array}{rcll}\psi & : & \mathcal{SM}_n & \to \mathbb{R}^2 \\ & & A & \mapsto \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) - D(A), \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}\right) - D(A)\right)\end{array}$$
   (a) Vérifier que ψ est linéaire. On pourra d'abord justifier que $D : A \mapsto D(A)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{SM}_n, \mathbb{R})$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\psi)$.
   (c) Le but de cette question est de démontrer que ψ est surjective.
      i. On suppose que n est impair, démontrer que les vecteurs $(n-1, 0)$ et $(0, n-1)$ ont un antécédent par ψ. En déduire que ψ est surjective.
      ii. On suppose que n est pair, démontrer que les vecteurs $(n-1, -1)$ et $(-1, n-1)$ ont un antécédent par ψ. En déduire que ψ est surjective.
   (d) En déduire la dimension de $\mathcal{MG}_n$.

B-Produit de matrices magiques

1. Montrer que : $A \in \mathcal{SM}_n \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ AJ_n = J_nA = \lambda J_n$. En déduire que $\mathcal{SM}_n$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n$.
2. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{SM}_n$, montrer que $D(A)$ est non nul et que $A^{-1} \in \mathcal{SM}_n$. Comparer $D(A)$ et $D(A^{-1})$. Réciproquement si $D(A)$ est non nul, A est-elle inversible ?
3. $\mathcal{MG}_n$ est-il un sous-anneau de $\mathcal{M}_n$?
4. Montrer que si $A \in \mathcal{MG}_n$, on n'a pas nécessairement $A^2 \in \mathcal{MG}_n$. On pourra exhiber un contre-exemple pour $n = 3$.

C-Matrices magiques de taille 3

Dans toute cette partie, on prend $n = 3$.
On considère les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = {}^tA,\ C = J_3 \text{ et } F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
On remarquera que ces 4 matrices sont magiques et que $A + B = -2F$.

1. (a) Montrer que toute matrice magique est la somme, de façon unique, d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique.
   (b) Déterminer toutes les matrices magiques antisymétriques. On exprimera le résultat à l'aide de la matrice $A + F$.
   (c) Déterminer toutes les matrices magiques symétriques, M, telles que $D(M) = 0$. On exprimera le résultat à l'aide de F.
   (d) En déduire une description des matrices magiques symétriques à l'aide de F et C.
   (e) En déduire que A, B et C forment une base de $\mathcal{MG}_3$.
2. On étudie dans cette question l'effet du produit sur les matrices magiques de taille 3.
   (a) Calculer A^2, B^2, C^2, AC, BC, CA, CB. Ecrire $AB + BA$ comme une combinaison linéaire de C et I_3.
   (b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices magiques soit une matrice magique.
   (c) Vérifier que le produit d'une matrice magique par une combinaison linéaire de C et I_3 est une matrice magique.

(d) Soit $M \in \mathcal{MG}_3$ et $p \in \mathbb{N}$ un entier impair, démontrer que $M^p \in \mathcal{MG}_3$. Montrer que ce résultat n'est, en général, pas vérifié pour les puissances paires.

3. Le résultat précédent est faux pour $n = 4$. Pour démontrer ceci, on considère :

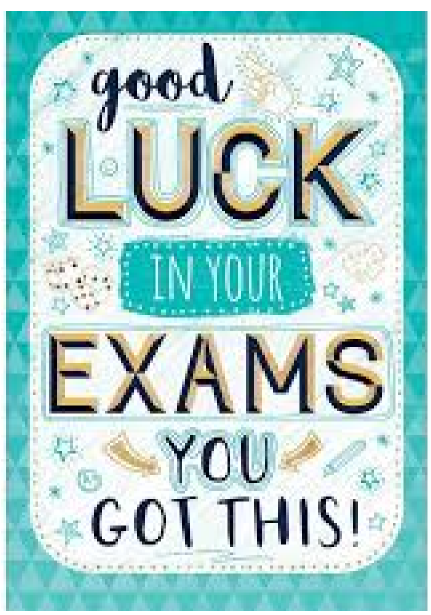
$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que pour tout entier $p \geq 2$, la matrice T^p n'est pas magique.

D-Carrés magiques

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et on cherche les éléments de $\mathcal{MG}_3$ à coefficients entiers naturels : les carrés magiques.

1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{MG}_3$, montrer que $D(A) = 3a_{22}$.
2. Soit $B = A - a_{22}J_3$ où $A \in \mathcal{MG}_3$. On note $B = (b_{ij})$ et on pose $\alpha = b_{11}$ et $\beta = b_{13}$.
   (a) Calculer les coefficients de B en fonction de α et β.
   (b) On note $\gamma = \dfrac{D(A)}{3}$. Exprimer les coefficients de A en fonction de α, β et γ.
   (c) Retrouver ainsi la dimension de $\mathcal{MG}_3$ en donnant une base de $\mathcal{MG}_3$.
3. On fixe $\gamma \in \mathbb{N}$, déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur α et β pour qu'il existe une matrice magique A définie par la formule de la question précédente à coefficients dans $\mathbb{N}$.
4. $D(A)$ étant donné dans $\mathbb{N}$, combien existe-t-il de carrés magiques à coefficients dans $\mathbb{N}$? dans $\mathbb{N}^*$?
5. Déterminer tous les carrés magiques dont les éléments appartiennent à $[\![1, 9]\!]$, chacun ne figurant qu'une seule fois. On pourra réduire l'étude des cas en observant des symétries.



FIN

Problème 1

1. (a) Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda P + Q) & = & (\lambda P + Q)'' - X(\lambda P + Q)' \\ & = & \lambda P'' + Q'' - X(\lambda P' + Q') \\ & = & \lambda(P'' - XP') + (Q'' - XQ') \\ & = & \lambda f(P) + f(Q) \end{array}$$

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$$

(b) i. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- si $k = 0$, on a : $f(X^0) = f(1) = 0$.
- si $k = 1$, on a : $f(X) = -X$.
- si $k \geq 2$, on a : $f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - kX^k$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - kX^k}$$

Cela peut paraître problématique d'écrire X^{k-2} si $k \leq 1$ mais le coefficient $k(k-1)$ va alors s'annuler et le terme sera nul.

ii. Si $P = 0$, alors $f(P) = 0$ et son degré vaut $-\infty$. Prenons dans la suite $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, de degré $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ avec } (a_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ et } a_n \neq 0$$

En utilisant la linéarité de f et la question précédente, il vient :

$$f\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\Big) = \sum_{k=0}^{n} a_k f(X^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k (k(k-1)X^{k-2} - kX^k)$$

Si $n = 0$, c'est-à-dire si P est un polynôme constant alors $f(P) = 0$. Si $n \geq 1$, on constate que $f(P)$ est degré n car son monôme dominant est $-na_nX^n$ avec $-na_n \neq 0$. En résumé si P est un polynôme de degré n, on a :

$$\boxed{\begin{cases} \deg(f(P)) = -\infty & \text{si } n = -\infty \text{ ou } n = 0 \\ \deg(f(P)) = n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}}$$

(c) Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f(P) = 0$. D'après la question précédente, c'est équivalent à dire que P est un polynôme constant.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]}$$

(d) D'après l'étude menée à la question 1.(b).ii., le degré de $f(P)$ ne peut être égal à 0. Ainsi les polynômes constants non nuls n'ont pas d'antécédent par f.

$$\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$$

2. (a) On procède par équivalence.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$. On a :

$$P(-X) = P(X) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux donc :

$$P(-X) = P(X) \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k (-1)^k = a_k \Leftrightarrow a_k = 0 \text{ si } k \text{ est impair}$$

Ce qui démontre que :

$$\boxed{P(-X) = P(X) \Leftrightarrow P \in \mathcal{P}_X}$$

(b) La méthode est identique à celle de la question précédente. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$. On a :

$$P(-X) = -P(X) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k X^k = -\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux donc :

$$P(-X) = P(X) \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k (-1)^k = -a_k \Leftrightarrow a_k = 0 \text{ si } k \text{ est pair}$$

Ce qui démontre que :

$$\boxed{P(-X) = -P(X) \Leftrightarrow P \in \mathcal{I}_X}$$

(c) On va utiliser la caractérisation vue à la question précédente.
- Par définition : $\mathcal{P}_X \subset \mathbb{R}[X]$.
- Si P est le polynôme nul, on a bien $P(-X) = P(X)$.
- Soient $(P, Q) \in \mathcal{P}_X^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\lambda P + Q)(-X) = \lambda P(-X) + Q(-X) = \lambda P(X) + Q(X) = (\lambda P + Q)(X)$$

Ce qui démontre que $\lambda P + Q \in \mathcal{P}_X$.

$$\boxed{\mathcal{P}_X \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$$

De même :
- Par définition : $\mathcal{I}_X \subset \mathbb{R}[X]$.
- Si P est le polynôme nul, on a bien $P(-X) = -P(X)$.
- Soient $(P, Q) \in \mathcal{I}_X^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\lambda P + Q)(-X) = \lambda P(-X) + Q(-X) = -\lambda P(X) - Q(X) = -(\lambda P + Q)(X)$$

Ce qui démontre que $\lambda P + Q \in \mathcal{I}_X$.

$$\boxed{\mathcal{I}_X \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$$

(d) Vérifions les deux propriétés requises pour vérifier la supplémentarité.

• Soit $P \in \mathcal{P}_X \cap \mathcal{I}_X$, on a $P(-X) = P(X)$ et $P(-X) = -P(X)$ d'où $P(X) = -P(X)$ et P est bien le polynôme nul. Ce qui démontre que $\mathcal{P}_X \cap \mathcal{I}_X = \{0\}$.

• Il reste à démontrer que $\mathcal{S}_X + \mathcal{I}_X = \mathbb{R}[X]$. Par analogie avec la décomposition connue pour les fonctions paires et impaires, on suppose qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit :

$$P(X) = \underbrace{\frac{1}{2}\Big(P(X) + P(-X)\Big)}_{Q(X)} + \underbrace{\frac{1}{2}\Big(P(X) - P(-X)\Big)}_{R(X)}$$

Cette décomposition convient car $Q \in \mathcal{S}_X$ et $R \in \mathcal{I}_X$ puisque :

$$Q(-X) = \frac{1}{2}\Big(P(-X) + P(-(-X))\Big) = \frac{1}{2}\Big(P(-X) + P(X)\Big) = Q(X)$$

$$R(-X) = \frac{1}{2}\Big(P(-X) - P(-(-X))\Big) = \frac{1}{2}\Big(P(-X) - P(X)\Big) = -\frac{1}{2}\Big(P(X) - P(-X)\Big) = -R(X)$$

$$\boxed{\mathcal{S}_X \oplus \mathcal{I}_X = \mathbb{R}[X]}$$

On aurait pu aussi remarquer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, $T : P(X) \mapsto P(-X)$ est une symétrie. D'après le cours cela implique que :

$$\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id}) = \mathbb{R}[X]$$

Pour obtenir le résultat demandé, il reste à remarquer que Ker$(T - Id) = \mathcal{P}_X$ et Ker$(T + Id) = \mathcal{I}_X$.

(e) Soit $P \in \mathcal{P}_X$, montrons que $f(P)$ est également un polynôme pair. Remarquons que la relation $P(-X) = P(X)$ implique que $-P'(-X) = P'(X)$ et $P''(-X) = P''(X)$. Ainsi :

$$f(P)(-X) = P''(-X) - (-X)P'(-X) = P''(X) - XP'(X) = f(P)(X)$$

Ce qui démontre que $f(P) \in \mathcal{P}_X$.
On procède de même pour $\mathcal{I}_X$. Soit $P \in \mathcal{I}_X$, montrons que $f(P)$ est également un polynôme impair. Remarquons que la relation $P(-X) = -P(X)$ implique que $P'(-X) = P'(X)$ et $P''(-X) = -P''(X)$. Ainsi :

$$f(P)(-X) = P''(-X) - (-X)P'(-X) = -P''(X) + XP'(X) = -f(P)(X)$$

Ce qui démontre que $f(P) \in \mathcal{I}_X$.

$$\boxed{\mathcal{P}_X \text{ et } \mathcal{I}_X \text{ sont stables par } f}$$

3. (a) D'après la question 2.(e), on sait que $\mathcal{I}_X$ est stable par f ainsi l'application g est bien à valeurs dans $\mathcal{I}_X$. Par linéarité de f, démontrée à la question 1.(a), on a :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$$

C'est en particulier vrai si l'on prend $(P, Q) \in \mathcal{I}_X^2$. Ainsi g est une application linéaire de $\mathcal{I}_X$ dans lui-même.

$$\boxed{g \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$$

(b) Soit $P \in \text{Ker}(g)$ en particulier P est dans le noyau de f donc P est un polynôme constant. De plus $P \in \mathcal{I}_X$ et le seul polynôme constant impair est le polynôme nul.

$$\boxed{\text{Ker}(g) = \{0\}}$$

(c) Il s'agit de démontrer que les polynômes n'ayant que des monômes de degré impair ont un antécédent par g. On peut décomposer le problème en commençant par démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X^{2n+1} \in \text{Im}(g)$$

• **Initialisation.** On a : $g(-X) = X$ ainsi $X \in \text{Im}(g)$.
• **Hérédité.** Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $X^{2n+1} \in \text{Im}(g)$, c'est-à-dire que $X^{2n+1} = g(R)$ avec $R \in \mathcal{I}_X$. On a :

$$g(X^{2n+3}) = (2n+3)(2n+2)X^{2n+1} - (2n+3)X^{2n+3}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} X^{2n+3} &= \frac{1}{2n+3}\Big((2n+3)(2n+2)X^{2n+1} - g(X^{2n+3})\Big) \\ &= \frac{1}{2n+3}\Big((2n+3)(2n+2)g(R) - g(X^{2n+3})\Big) \\ &= g\Big((2n+2)R - \frac{1}{2n+3}X^{2n+3}\Big) \end{aligned}$$

Ceci en utilisant la linéarité de g. Le polynôme $(2n+2)R - \dfrac{1}{2n+3}X^{2n+3}$ est bien impair, ainsi la relation précédente démontre que $X^{2n+3} \in \text{Im}(g)$ et achève la récurrence.
On a démontré que pour tout entier naturel n, $X^{2n+1} \in \text{Im}(g)$. Étant donné que $\text{Im}(g)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, il contient également les combinaisons linéaires des monômes X^{2n+1}, c'est-à-dire les polynômes impairs, d'après la définition. Finalement $\mathcal{I}_X = \text{Im}(g)$.

$$\boxed{g \text{ est surjective}}$$

(d) L'application g est linéaire de $\mathcal{I}_X$ dans lui-même et c'est une bijection d'après les deux questions précédentes. En effet, la question 3.(b) démontre que le noyau de g est réduit au vecteur nul ce qui implique que g est injective.

$$\boxed{g \text{ est un automorphisme de } \mathcal{I}_X}$$

On a vu que $g(-X) = X$ ainsi :

$$\boxed{g^{-1}(X) = -X}$$

On a :

$$g(X^3) = 6X - 3X^3 \text{ c'est-à-dire } 3X^3 = 6X - g(X^3) = 6g(-X) - g(X^3)$$

Ce qui donne, par linéarité de g :

$$X^3 = g\Big(-2X - \frac{1}{3}X^3\Big)$$

On obtient :

$$\boxed{g^{-1}(X^3) = -2X - \frac{1}{3}X^3}$$

De même, on a :

$$g(X^5) = 20X^3 - 5X^5 \text{ c'est-à-dire } 5X^5 = 20X^3 - g(X^5) = 20g\Big(-2X - \frac{1}{3}X^3\Big) - g(X^5)$$

Ce qui donne par linéarité de g :

$$X^5 = g\Big(-8X - \frac{4}{3}X^3 - \frac{1}{5}X^5\Big)$$

$$\boxed{g^{-1}(X^5) = -8X - \frac{4}{3}X^3 - \frac{1}{5}X^5}$$

4. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n = \deg(P)$. Pour tout $k \geq n+1$, on a $P^{(k)} = 0$ et par suite $P^{(k)}(0) = 0$. La somme intervenant dans la définition de la fonction φ est en réalité finie.

$$\boxed{\varphi \text{ est bien définie}}$$

(b) Soit $P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ avec (a_k) une suite de réels nulle à partir d'un certain rang. Soit $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}(0)$ est le coefficient constant de $P^{(k)}$. Il provient de la dérivée k-ième du monôme de degré k de P qui vaut $a_k X^k$. La dérivée k-ième de ce monôme est $a_k k!$. On a démontré que pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}(0) = a_k k!$.

$$\boxed{\varphi(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k a_k k!}$$

(c) Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\varphi(\mu P + Q) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k (\mu P + Q)^{(k)}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \Big(\mu P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)\Big) \\
&= \mu \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k P^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k Q^{(k)}(0) \\
&= \mu\varphi(P) + \varphi(Q)
\end{aligned}$$

Toutes les sommes mises en jeu étant finies. De plus, φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire sur } \mathbb{R}[X]}$$

(d) i. Soit $k \in \mathbb{N}$. La dérivée k-ième de P'' est $P^{(k+2)}$. Il reste à déterminer la dérivée k-ième de XP', nous allons pour cela utiliser la formule de Leibniz.

$$(XP')^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^{(i)} (P')^{(k-i)}$$

Prenons $k \geq 1$, il y a uniquement deux termes non nuls dans la somme :

$$(XP')^{(k)} = \binom{k}{0} XP^{(k+1)} + \binom{k}{1} P^{(k)} = XP^{(k+1)} + kP^{(k)}$$

Remarquons que cette formule reste valable pour $k = 0$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ f(P)^{(k)} = P^{(k+2)} - XP^{(k+1)} - kP^{(k)}}$$

ii. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(f(P)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f(P)^{(k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k (P^{(k+2)} - XP^{(k+1)} - kP^{(k)})(0) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k (P^{(k+2)}(0) - kP^{(k)}(0))\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(f(P)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k (P^{(k+2)}(0) - kP^{(k)}(0))}$$

iii. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $f(X^i)$ qui est dans l'image de f donc dans le noyau de φ. Ce qui démontre bien que $\varphi \circ f(X^i) = 0$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $\varphi(f(X^i)) = 0$. Soit $P \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(Q) = P$. Notons $Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$. En remarquant que $\varphi \circ f$ est linéaire en tant que composée d'applications linéaires, on a :

$$\varphi(P) = \varphi(f(Q)) = \varphi\Big(f\Big(\sum_{i=0}^{n} b_i X^i\Big)\Big) = \sum_{i=0}^{n} b_i \varphi(f(X^i)) = 0$$

Ce qui démontre que $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. On a vérifié que :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N},\ \varphi \circ f(X^i) = 0}$$

iv. Fixons $i \in \mathbb{N}$, d'après l'expression trouvée à la question 4.(d).ii, on a :

$$\varphi(f(X^i)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k ((X^i)^{(k+2)}(0) - k(X^i)^{(k)}(0))$$

Dans cette somme de nombreux termes sont nuls puisque la dérivée k-ième de X^i évaluée en 0 vaut toujours 0 sauf quand $k = i$ où elle vaut $i!$.

Simplifions la somme précédente :

- Si $i = 0$ tous les termes de la somme sont nuls.
- Si $i = 1$, seul le terme correspondant à $k = 1$ est non nul, il vaut $-\lambda_1$.
- Si $i \geq 2$, il y a deux termes non nuls dans la somme, lorsque $k = i - 2$ et lorsque $k = i$. Ce qui donne :

$$\varphi(f(X^i)) = \lambda_{i-2} i! - \lambda_i i \times i!$$

À présent, si la condition de la question précédente est vérifiée, on a pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\varphi(f(X^i)) = 0$. D'après les calculs menés dans cette question, cela signifie que :

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \forall i \geq 2,\ \lambda_i = \dfrac{\lambda_{i-2}}{i} \end{cases}}$$

v. Démontrons la propriété annoncée par récurrence sur i :

$$\mathcal{H}_i \ :\ \lambda_{2i+1} = 0 \text{ et } \lambda_{2i} = \frac{\lambda_0}{2^i i!}$$

- **Initialisation.** Pour $i = 0$, on a bien $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_0 = \dfrac{\lambda_0}{2^0 0!}$.
- **Hérédité.** Fixons $i \in \mathbb{N}$ et supposons que $\lambda_{2i+1} = 0$ et $\lambda_{2i} = \dfrac{\lambda_0}{2^i i!}$. D'après la formule démontrée à la question précédente, on a :

$$\lambda_{2i+3} = \frac{\lambda_{2i+1}}{2i+3} = 0$$

et :

$$\lambda_{2i+2} = \frac{\lambda_{2i}}{2i+2} = \frac{\lambda_0}{2^i i!(2i+2)} = \frac{\lambda_0}{2^{i+1}(i+1)!}$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{i+1}$ est vraie et achève la récurrence.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ \lambda_{2i+1} = 0 \text{ et } \lambda_{2i} = \frac{\lambda_0}{2^i i!}}$$

(e) Choisissons la suite (λ_k) trouvée à la question précédente avec $\lambda_0 = 1$ puisqu'il n'y a pas de condition imposée sur λ_0. On a alors :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \Big\{P \in \mathbb{R}[X],\ \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k P^{(k)}(0) = 0\Big\} = \Big\{P \in \mathbb{R}[X],\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(2k)}(0)}{2^k k!} = 0\Big\}$$

D'après la question 4.(d).v., on sait également que pour ce choix des (λ_k), on a : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Il reste à démontrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Im}(f)$. Dans tout le calcul qui suit, nous allons utiliser le résultat démontré à la question 4.(b) :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k)}(0) = a_k k!$$

où a_k est le coefficient du monôme de degré k de P. Ainsi, nous nous servirons de l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(2k)}(0)}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{2k}(2k)!}{2^k k!}$$

Pour démontrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Im}(f)$, nous allons procéder par récurrence sur le degré du polynôme considéré, plus précisément :

$$\mathcal{H}_n \ :\ \text{ si } \deg(P) \leq n \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(2k)}(0)}{2^k k!} = 0 \text{ alors } P \in \mathrm{Im}(f)$$

On note (a_k) la suite nulle à partir d'un certain rang des coefficients de P.

• **Initialisation.** Si $n \leq 0$ alors P est un polynôme constant qui vérifie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{2k}(2k)!}{2^k k!} = 0$. Dans la somme du membre de gauche, le seul terme non nul est a_0. Ainsi $a_0 = 0$ et P est le polynôme nul qui est bien dans l'image de f.

• **Hérédité.** On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie pour un entier naturel n fixé. Prenons P un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$. Si $\deg(P) < n+1$, on conclut directement avec l'hypothèse de récurrence. On suppose donc que $\deg(P) = n+1$ et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{2k}(2k)!}{2^k k!} = 0$. Il y a deux cas à considérer :

► Si n est pair alors $n+1$ est impair, on a :

$$P = a_{n+1}X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Le polynôme $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est bien dans l'image de f par hypothèse de récurrence puisqu'il vérifie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q^{(2k)}(0)}{2^k k!} = 0$. En effet, ajouter un monôme de degré impair ne change pas cette hypothèse qui ne met en jeu que les coefficients de degré pair.
Le polynôme $a_{n+1}X^{n+1}$ est dans l'image de f puisque $n+1$ est impair, en utilisant la question 3.(b). Étant donné que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, la somme est aussi un élément de l'image de f. Ce qui démontre que $P \in \mathrm{Im}(f)$.

► Si n est impair alors $n+1$ est pair. On a :

$$P = a_{n+1}X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Remarquons que $f(X^{n+1}) = (n+1)nX^{n-1} - (n+1)X^{n+1}$ ainsi :

$$P + f\Big(\frac{a_{n+1}}{n+1}X^{n+1}\Big) = a_{n+1}nX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = R$$

Notons $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ avec $(b_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ce polynôme R est de degré inférieur ou égal à n ainsi on va pouvoir lui appliquer l'hypothèse de récurrence s'il vérifie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_{2k}(2k)!}{2^k k!} = 0$. Les termes présents dans cette somme sont les mêmes que dans l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{2k}(2k)!}{2^k k!} = 0$ sauf celui qui correspond au degré $n-1$ (qui est pair) qui a changé. En notant $k = \dfrac{n-1}{2}$, ce terme vaut :

$$\frac{a_{2k+2}(2k+1)! + a_{2k}(2k)!}{2^k k!} = \frac{a_{2k+2}(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!} + \frac{a_{2k}(2k)!}{2^k k!}$$

On retrouve bien les deux termes présents dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(2k)}(0)}{2^k k!} = 0$. Finalement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{R^{(2k)}(0)}{2^k k!} = 0$, ce qui démontre que d'après l'hypothèse de récurrence que $R \in \mathrm{Im}(f)$. Or :

$$P = -f\Big(\frac{a_{n+1}}{n+1}X^{n+1}\Big) + R$$

ainsi $P \in \mathrm{Im}(f)$ comme somme de deux éléments de l'image de f.

Dans les deux cas, on a démontré que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence. Finalement $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \left\{P \in \mathbb{R}[X],\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(2k)}(0)}{2^k k!} = 0\right\}}$$

Problème 2 : Matrices magiques

A-Calcul des dimensions de $\mathcal{SM}_n$ et $\mathcal{MG}_n$

1. Vérifions les propriétés caractéristiques d'un sous-espace vectoriel :
▶ $\mathcal{SM}_n \subset \mathcal{M}_n$ par définition.
▶ La matrice nulle de taille n est bien semi-magique comme la somme d'une ligne ou d'une colonne est constante égale à 0.
▶ Soient $(A, B) \in \mathcal{SM}_n^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice $\lambda A + B$ est égale à $(\lambda a_{ij} + b_{ij})$, on a :

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{j=1}^{n} a_{lj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \qquad (1)$$

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{j=1}^{n} b_{lj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \qquad (2)$$

On effectue $\lambda(1) + (2)$ cela donne :

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{lj} + b_{lj}) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ik} + b_{ik})$$

Ce qui est la définition de $\lambda A + B$ semi-magique. On a démontré au passage que $D(\lambda A + B) = \lambda D(A) + D(B)$.

$$\boxed{\mathcal{SM}_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n}$$

La matrice identité est semi-magique puisque la somme des coefficients d'une ligne ou d'une colonne vaut 1.

$$\boxed{I_n \in \mathcal{SM}_n}$$

2. (a) Dans cette question les tailles des matrices seront précisées puisqu'il y a des matrices carrées de taille n et des matrices carrées de taille $n-1$. Il s'agit simplement de remarquer que si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $\varphi(A) = A_{nn} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1}$.
Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices semi-magiques et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a : $\varphi(\lambda A + B) =$

$$(\lambda A + B)_{nn} = (\lambda a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1} = \lambda (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1} + (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1} = \lambda A_{nn} + B_{nn} = \lambda \varphi(A) + \varphi(B)$$

$$\boxed{\varphi \text{ est linéaire}}$$

(b) Soient $A = (a_{ij}) \in \text{Ker}(\varphi)$, on a $\varphi(A) = 0_{n-1}$ où 0_{n-1} désigne la matrice nulle à $n-1$ lignes et $n-1$ colonnes. Ainsi une matrice du noyau est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,n} \\ \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Or la matrice A est semi-magique, donc la somme des coefficients d'une colonne ou d'une ligne est constante, c'est-à-dire :

$$\forall (k,l) \in [\![1, n-1]\!]^2,\ a_{n,k} = a_{l,n} = D(A)$$

Ainsi la matrice A est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & D(A) \\ \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & D(A) \\ D(A) & \dots & D(A) & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

La somme des coefficients de la ligne n et la somme des coefficients de la colonne n doivent aussi être égales à cette constante : $(n-1)D(A) + a_{n,n} = D(A)$. D'où $a_{n,n} = (2-n)D(A)$. Finalement, une matrice du noyau s'écrit :

$$D(A)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2-n \end{pmatrix}}_{T}$$

Réciproquement une telle matrice est bien semi-magique et est clairement dans le noyau de φ. C'est-à-dire que $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(T)$.
La matrice T étant non nulle, on a :

$$\boxed{\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(T) \text{ et } \dim(\text{Ker}(\varphi)) = 1}$$

(c) Soit $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$, trouvons une matrice $A \in \mathcal{SM}_n$ telle que $\varphi(A) = B$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n-1} & -\sum_{j=1}^{n-1} b_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,n-1} & -\sum_{j=1}^{n-1} b_{n-1,j} \\ -\sum_{i=1}^{n-1} b_{i,1} & \dots & -\sum_{i=1}^{n-1} b_{i,n-1} & \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} b_{i,j} \end{pmatrix}$$

Il est clair que si l'on supprime la dernière ligne et la dernière colonne de A, on obtient la matrice B, c'est-à-dire $\varphi(A) = B$. On vérifie immédiatement que la matrice A est semi-magique puisque, par construction, la somme de chaque ligne et de chaque colonne valent 0.

$$\boxed{\varphi \text{ est surjective}}$$

(d) On va appliquer le théorème du rang à l'application φ. D'après la question précédente, comme φ est surjective, on a : $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{M}_{n-1}$. C'est-à-dire que $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\mathcal{M}_{n-1}) = (n-1)^2$. D'où :

$$\dim(\mathcal{SM}_n) = \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))}_{=1} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(\varphi))}_{=(n-1)^2}$$

On obtient :

$$\boxed{\dim(\mathcal{SM}_n) = n^2 - 2n + 2}$$

3. Vérifions les conditions requises pour que $\mathcal{MG}_n$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathcal{SM}_n$.
▶ $\mathcal{MG}_n \subset \mathcal{SM}_n$ par définition.
▶ La matrice nulle appartient bien à $\mathcal{MG}_n$ puisque la somme des coefficients d'une de ses lignes, colonnes ou diagonales est constante égale à 0.
▶ Soient $(A, B) \in \mathcal{MG}_n^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. En conservant les notations habituelles, on a $\lambda A + B = (\lambda a_{ij} + b_{ij})$. Par hypothèse $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i} = D(A)$ et $\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{i,n+1-i} = D(B)$. Ainsi :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} + b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{i,n+1-i} + b_{i,n+1-i} = \lambda D(A) + D(B) = D(\lambda A + B)$$

Ce qui démontre que $\lambda A + B \in \mathcal{MG}_n$.

$$\boxed{\mathcal{MG}_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{SM}_n}$$

La matrice J_n est clairement une matrice magique puisque la somme des coefficients d'une de ses lignes, colonnes ou diagonales est constante égale à n.

$$\boxed{J_n \in \mathcal{MG}_n}$$

4. Donnons nous une matrice de taille 2 et tentons de trouver des conditions pour qu'elle appartienne à $\mathcal{SM}_2$ ou $\mathcal{MG}_2$. On note :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a :

$$A \in \mathcal{SM}_2 \Leftrightarrow a+b = a+c = b+d = c+d \Leftrightarrow b = c \text{ et } a = d \Leftrightarrow A = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{T_2}$$

La famille (T_1, T_2) est libre d'où :

$$\boxed{\mathcal{SM}_2 = \mathrm{Vect}(T_1, T_2) \text{ et } \dim(\mathcal{SM}_2) = 2}$$

Ce qui coïncide bien avec la formule trouvée à la question 2.(d).
En reprenant ce résultat, on a :

$$A \in \mathcal{MG}_2 \Leftrightarrow \underbrace{A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}}_{\text{car } A \in \mathcal{SM}_2} \text{ et } 2a = 2b \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$$

Ce qui démontre que :

$$\boxed{\mathcal{MG}_2 = \mathrm{Vect}(J_2) \text{ et } \dim(\mathcal{MG}_2) = 1}$$

5. (a) L'application ψ est correctement définie puisque $D(A)$ a un sens pour une matrice A de $\mathcal{SM}_n$. L'application D est linéaire puisque nous avons démontré à la question 1. que :

$$\forall (A,B)\in \mathcal{SM}_n^2, \forall \lambda\in\mathbb{R},\ D(\lambda A+B)=\lambda D(A)+D(B)$$

Ce qui implique que l'application g suivante est linéaire :

$$g\ :\ \begin{array}{rcl} \mathcal{SM}_n & \to & \mathbb{R}^2 \\ A & \mapsto & (D(A),D(A)) \end{array}$$

D'autre part, montrons que l'application suivante est linéaire :

$$f\ :\ \begin{array}{rcl} \mathcal{SM}_n & \to & \mathbb{R}^2 \\ A & \mapsto & \Big(\sum_{i=1}^n a_{ii}, \sum_{i=1}^n a_{i,n+1-i}\Big) \end{array}$$

Soient $(A,B)\in\mathcal{SM}_n^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a avec les notations habituelles $f(\lambda A+B)=$

$$\Big(\sum_{i=1}^n \lambda a_{ii}+b_{ii}, \sum_{i=1}^n \lambda a_{i,n+1-i}+b_{i,n+1-i}\Big)=\lambda\Big(\sum_{i=1}^n a_{ii}, \sum_{i=1}^n a_{i,n+1-i}\Big)+\Big(\sum_{i=1}^n b_{ii}, \sum_{i=1}^n b_{i,n+1-i}\Big)=\lambda f(A)+f(B)$$

Finalement $\psi=f-g$ est linéaire comme somme d'applications linéaires.

$$\boxed{\psi \text{ est linéaire}}$$

(b) On a $A\in\mathrm{Ker}(\psi)$ si et seulement si $\sum_{i=1}^n a_{ii}=\sum_{i=1}^n a_{i,n+1-i}=D(A)$. Ceci est exactement la définition de $\mathcal{MG}_n$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\psi)=\mathcal{MG}_n}$$

(c) On va utiliser la matrice : $\widehat{I_n}=(\delta_{i,n+1-j})$, c'est-à-dire la matrice ne comportant que des 0 sauf des 1 sur l'antidiagonale, c'est clairement une matrice semi-magique.

▶ Prenons n impair, on a $\psi(I_n)=(n-1,0)$ et $\psi(\widehat{I_n})=(0,n-1)$. Nous avons trouvé deux vecteurs de l'image de ψ, ces vecteurs sont libres puisque $n\geq 3$:

$$\underbrace{\mathrm{Vect}((n-1,0),(0,n-1))}_{\text{de dimension 2}}\subset \mathrm{Im}(\psi)\subset \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{de dimension 2}}$$

Par suite $\mathrm{Im}(\psi)=\mathbb{R}^2$ et ψ est surjective.

▶ Prenons n pair, on a $\psi(I_n)=(n-1,-1)$ puisque l'antidiagonale ne comporte dans ce cas pas de 1 puisque $n\geq 3$ est pair. D'autre part $\psi(\widehat{I_n})=(-1,n-1)$. Ces deux vecteurs sont libres car $n\geq 3$ et l'on conclut avec exactement la même démarche que précédemment que ψ est surjective.

$$\boxed{\psi \text{ est surjective}}$$

(d) On applique à présent le théorème du rang, sachant que d'après la question 5.(b) $\mathrm{Ker}(\psi)=\mathcal{MG}_n$:

$$\dim(\mathcal{MG}_n)+\underbrace{\dim(\mathrm{Im}(\psi))}_{=\dim(\mathbb{R}^2)=2 \text{ car } \psi \text{ est surjective}}=\underbrace{\dim(\mathcal{SM}_n)}_{n^2-2n+2 \text{ d'après 2.(d)}}$$

Cette question et la question 4. permettent d'affirmer que :

$$\boxed{\dim(\mathcal{MG}_n)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad n=2 \\ n^2-2n & \text{si} \quad n\geq 3\end{cases}}$$

B-Produit de matrices magiques

1. Avec la formule donnant le produit de deux matrices, on a $AJ_n = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Big)_{1\leq i,j\leq n}$ et $J_nA = \Big(\sum_{l=1}^{n} a_{lj}\Big)_{1\leq i,j\leq n}$.

   On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} A = (a_{ij}) \in \mathcal{SM}_n \quad &\Leftrightarrow \quad \forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{j=1}^{n} a_{lj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = D(A) \\ &\Leftrightarrow \quad AJ_n = J_nA = (D(A))_{1\leq i,j\leq n} \\ &\Leftrightarrow \quad AJ_n = J_nA = D(A)J_n \end{aligned}$$

   Vérifions les conditions requises pour avoir un sous-anneau :
   ▶ $\mathcal{SM}_n$ est un sous groupe de $\mathcal{M}_n$ en tant que sous-espace vectoriel.
   ▶ $\mathcal{SM}_n \subset \mathcal{M}_n$.
   ▶ $I_n \in \mathcal{SM}_n$.
   ▶ Soient $(A,B) \in \mathcal{SM}_n^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a grâce à l'associativité du produit matriciel et en utilisant la propriété démontrée précédemment :

$$(AB)J_n = A(BJ_n) = AD(B)J_n = D(B)AJ_n = D(A)D(B)J_n \quad \text{et}$$

$$J_n(AB) = (J_nA)B = D(A)J_nB = D(A)D(B)J_n$$

   Ce qui démontre que $AB \in \mathcal{SM}_n$.

$$\boxed{\mathcal{SM}_n \text{ est un sous-anneau de } \mathcal{M}_n}$$

2. Soit $A \in \mathcal{GL}_n \cap \mathcal{SM}_n$, on suppose par l'absurde que $D(A) = 0$, on a d'après la question précédente : $AJ_n = D(A)J_n = 0_n$. Comme A est inversible, si nous multiplions à gauche l'égalité précédente par A^{-1}, il vient : $J_n = 0_n$, ce qui est absurde. Ainsi $D(A) \neq 0$.
   On se donne toujours $A \in \mathcal{GL}_n \cap \mathcal{SM}_n$, pour montrer que $A^{-1} \in \mathcal{SM}_n$ nous allons réutiliser une technique vue en exercice, en posant :

$$\begin{array}{rccc} \Gamma_A & : & \mathcal{SM}_n & \to & \mathcal{SM}_n \\ & & M & \mapsto & AM \end{array}$$

   Cette application est bien définie car $\mathcal{SM}_n$ est stable par produit, elle est clairement linéaire et :

$$M \in \mathrm{Ker}(\Gamma_A) \Leftrightarrow AM = 0_n \Leftrightarrow M = A^{-1}0_n \Leftrightarrow M = 0_n$$

   Ceci montre que Γ_A est injective, comme c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est également une bijection. En particulier I_n a un antécédent par Γ_A, c'est-à-dire qu'il existe $B \in \mathcal{SM}_n$ tel que $AB = I_n$. On en déduit que $B = A^{-1}$ ce qui démontre que l'inverse de A appartient à $\mathcal{SM}_n$.

$$\boxed{\mathcal{SM}_n \text{ est stable par passage à l'inverse}}$$

   Prenons toujours $A \in \mathcal{GL}_n \cap \mathcal{SM}_n$, on a $A^{-1} \in \mathcal{SM}_n$. D'après la question 1., il vient :

$$AA^{-1}J_n = AD(A^{-1})J_n = D(A^{-1})AJ_n = D(A^{-1})D(A)J_n$$

et d'autre part $AA^{-1}J_n = J_n$. Ceci implique que $D(A^{-1})D(A) = 1$ d'où :

$$\boxed{D(A^{-1}) = D(A)^{-1}}$$

Si l'on considère la matrice J_n qui est semi-magique, on a $D(J_n) = n \neq 0$ pourtant J_n n'est clairement pas inversible puisque ses colonnes sont liées puisqu'elles sont égales.

3. L'ensemble $\mathcal{MG}_n$ n'est clairement pas un sous-anneau de $\mathcal{M}_n$ puisque la matrice identité n'est pas magique.
4. On pose $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, c'est une matrice magique mais : $F^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas magique.
Cet exemple est plus facile à trouver grâce à l'étude qui va être menée dans la partie C.

C-Matrices magiques de taille 3

1. (a) Soit M une matrice magique, la première décomposition à laquelle on pense est :

$$M = \underbrace{\frac{M + {}^tM}{2}}_{M_1} + \underbrace{\frac{M - {}^tM}{2}}_{M_2}$$

La matrice M_1 est symétrique et la matrice M_2 est antisymétrique, il reste à justifier que M_1 et M_2 sont magiques.
La transposée d'une matrice magique est clairement une matrice magique, ainsi comme l'ensemble des matrices magiques forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3$, on a $\dfrac{M + {}^tM}{2}$ et $\dfrac{M - {}^tM}{2}$ qui sont des matrices magiques. Si l'on note $\mathcal{MG}_3^S$ l'ensemble des matrices magiques symétriques et $\mathcal{MG}_3^A$ l'ensemble des matrices magiques antisymétriques, on a démontré que :

$$\mathcal{MG}_3 = \mathcal{MG}_3^S + \mathcal{MG}_3^A$$

De plus $\mathcal{MG}_3^S \cap \mathcal{MG}_3^A = \{0_n\}$ puisqu'une matrice qui est symétrique et antisymétrique est nécessairement la matrice nulle. D'où :

$$\boxed{\mathcal{MG}_3^S \oplus \mathcal{MG}_3^A = \mathcal{MG}_3}$$

(b) La forme générale d'une matrice antisymétrique de taille 3 est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

On a ainsi pour une matrice antisymétrique M :

$$M \in \mathcal{MG}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta &= 0 \\ -\alpha + \gamma &= 0 \\ -\beta - \gamma &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -\beta = \gamma \Leftrightarrow M = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A+F}$$

Si l'on note toujours $\mathcal{MG}_n^A$ l'ensemble des matrices magiques antisymétriques, on a :

$$\boxed{\mathcal{MG}_n^A = \mathrm{Vect}(A + F)}$$

(c) C'est la même démarche qu'à la question précédente, la forme générale d'une matrice symétrique de taille 3 est :

$$M = \begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \alpha & b & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix} \text{ où } (a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

Ainsi pour une matrice symétrique M, on a les équivalences :

$$M \in \mathcal{MG}_3 \text{ et } D(M) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + \alpha + \beta & = 0 \\ \alpha + b + \gamma & = 0 \\ \beta + \gamma + c & = 0 \\ a + b + c & = 0 \\ 2\beta + b & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = b = 0 \\ a = \gamma = -c = -\alpha \end{cases} \Leftrightarrow M = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{F}$$

Si l'on note $\mathcal{MG}_3^{S_0}$ l'ensemble des matrices magiques symétriques avec la somme des lignes, colonnes et diagonales qui vaut 0, on a :

$$\boxed{\mathcal{MG}_3^{S_0} = \mathrm{Vect}(F)}$$

(d) On considère une matrice symétrique magique que l'on note toujours :

$$M = \begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \alpha & b & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix}$$

On pose $\widehat{M} = M - \dfrac{a+b+c}{3}C$. La matrice $\widehat{M}$ est encore symétrique et magique comme somme de matrices l'étant. Mais, par construction, la somme des lignes, colonnes ou diagonales de $\widehat{M}$ vaut 0. D'après la question précédente, cela implique que $\widehat{M} = \lambda F$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $M = \widehat{M} + \mu C = \lambda F + \mu C$ où $\mu = \dfrac{a+b+c}{3}$.

$$\boxed{\mathcal{MG}_3^{S} = \mathrm{Vect}(F, C)}$$

(e) D'après la question 1.(a), toute matrice magique, M, de taille 3 peut s'écrire de façon unique sous la forme : $M = M_1 + M_2$ où M_1 est une matrice symétrique magique et M_2 une matrice antisymétrique magique. D'après la question 1.(b), on a : $M_1 = \lambda(A + F)$ et d'après la question 1.(d), on a : $M_2 = \mu F + \delta C$. Ainsi en utilisant $A + B = -2F$, il vient :

$$M = \lambda(A + F) + \mu F + \delta C = \lambda(A - \frac{1}{2}(A + B)) - \mu\frac{1}{2}(A + B) + \delta J = \frac{1}{2}(\lambda - \mu)A - \frac{1}{2}(-\lambda - \mu)B + \delta C$$

Ce qui démontre que $\mathcal{MG}_3 = \mathrm{Vect}(A, B, C)$. On vérifie immédiatement que A, B et C forment une famille libre. Si l'on veut se dispenser de ce calcul, il est également possible d'utiliser la question 5.(d) de la partie A qui précise que $\dim(\mathcal{MG}_3) = 3^2 - 2 \times 3 = 3$; ce permet d'affirmer que A, B et C sont libres puisqu'elles forment une famille génératrice de $\mathcal{MG}_3$ de cardinal 3.

$$\boxed{A, B \text{ et } C \text{ forment une base de } \mathcal{MG}_3}$$

2. (a) On obtient par un calcul direct que $A^2 = B^2 = AC = BC = CA = CB = 0_3$ et $C^2 = 3C$. D'autre part :

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \; BA = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } AB + BA = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} = 12I_3 - 4C$$

(b) Soient M et $\widehat{M}$ deux matrices magiques de taille 3, d'après la question 1.(e), elles s'écrivent :

$$M = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C \text{ et } \widehat{M} = \widehat{\lambda_1} A + \widehat{\lambda_2} B + \widehat{\lambda_3} C$$

On effectue le produit en tenant compte des résultats trouvés à la question précédente, on a : $M\widehat{M} = \lambda_1\widehat{\lambda_1}\underbrace{A^2}_{=0} + \lambda_1\widehat{\lambda_2}AB + \lambda_1\widehat{\lambda_3}\underbrace{AC}_{=0} + \lambda_2\widehat{\lambda_1}BA + \lambda_2\widehat{\lambda_2}\underbrace{B^2}_{=0} + \lambda_2\widehat{\lambda_3}\underbrace{BC}_{=0} + \lambda_3\widehat{\lambda_1}\underbrace{CA}_{=0} + \lambda_3\widehat{\lambda_2}\underbrace{CB}_{=0} + \lambda_3\widehat{\lambda_3}\underbrace{C^2}_{=3C}$
$= \lambda_1\widehat{\lambda_2}AB + \lambda_2\widehat{\lambda_1}BA + 3\lambda_3\widehat{\lambda_3}C$
Ainsi comme $3\lambda_3\widehat{\lambda_3}C \in \mathcal{MG}_3$ et $\mathcal{MG}_3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3$, on a :

$$M\widehat{M} \in \mathcal{MG}_3 \Leftrightarrow M\widehat{M} - 3\lambda_3\widehat{\lambda_3}C \in \mathcal{MG}_3 \Leftrightarrow \lambda_1\widehat{\lambda_2}AB + \lambda_2\widehat{\lambda_1}BA \in \mathcal{MG}_3$$

Nous avons déjà calculé AB et BA à la question 2.(a), d'où :

$$\lambda_1\widehat{\lambda_2}AB + \lambda_2\widehat{\lambda_1}BA = \begin{pmatrix} 6\lambda_1\widehat{\lambda_2} + 2\lambda_2\widehat{\lambda_1} & -4\lambda_2\widehat{\lambda_1} & -6\lambda_1\widehat{\lambda_2} + 2\lambda_2\widehat{\lambda_1} \\ -4\lambda_2\widehat{\lambda_1} & 8\lambda_2\widehat{\lambda_1} & -4\lambda_2\widehat{\lambda_1} \\ -6\lambda_1\widehat{\lambda_2} + 2\lambda_2\widehat{\lambda_1} & -4\lambda_2\widehat{\lambda_1} & 6\lambda_1\widehat{\lambda_2} + 2\lambda_2\widehat{\lambda_1} \end{pmatrix}$$

La somme des lignes et colonnes vaut 0, ainsi cette matrice est magique si et seulement si la somme des coefficients diagonaux et antidiagonaux vaut 0, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 12(\lambda_1\widehat{\lambda_2} + \lambda_2\widehat{\lambda_1}) = 0 \\ 12(-\lambda_1\widehat{\lambda_2} + \lambda_2\widehat{\lambda_1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1\widehat{\lambda_2} = \lambda_2\widehat{\lambda_1} = 0$$

Finalement :

$$M\widehat{M} \in \mathcal{MG}_3 \Leftrightarrow M\widehat{M} = 3\lambda_3\widehat{\lambda_3}C$$

$$\boxed{\text{Le produit de deux matrices magiques est magique si et seulement si c'est un multiple de } C}$$

(c) Prenons $M = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$ une matrice magique, effectuons le produit de cette matrice par $\alpha I_3 + \beta C$. Cela donne après les simplifications remarquées dans la question 2.(a) :

$$M(\alpha I_3 + \beta C) = \lambda_1\alpha A + \lambda_2\beta B + (\lambda_3\alpha + 3\lambda_3\beta)C$$

$$(\alpha I_3 + \beta C)M = \alpha\lambda_1 A + \alpha\lambda_2 B + (\alpha\lambda_3 + 3\beta\lambda_3)C$$

La matrice obtenue est une combinaison linéaire de A, B et C, c'est une matrice magique.

(d) Soit $M = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$ une matrice magique, puisque l'on s'intéresse aux puissances de M commençons par calculer M^2, on a après un calcul rapide utilisant les simplifications mises en évidence dans les questions précédentes :

$$M^2 = 12\lambda_1\lambda_2 I_3 + (3\lambda_3^2 - 4\lambda_1\lambda_2)C$$

La matrice M^2 est magique si et seulement si $\lambda_1\lambda_2 = 0$ puisque I_3 n'est pas une matrice magique. Ceci démontre, qu'en général, les puissances paires d'une matrice magique ne sont pas des matrices magiques.
Par contre $M^3 = MM^2$ est le produit d'une matrice magique par une combinaison linéaire de I_3 et C, d'après la question précédente, c'est une matrice magique.
Ces premières puissances illustrent le principe, démontrons-le par récurrence :

$$\mathcal{H}_k : \ M^{2k} \text{ est combinaison linéaire de } I_3 \text{ et } C; \ M^{2k+1} \text{ est magique.}$$

► Lorsque $k = 0$, le résultat est évident et nous l'avons également justifié pour $k = 1$.
► Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie pour un certain entier naturel k. On a $M^{2k+2} = M^{2k}M^2$ qui est un produit de matrices étant des combinaisons linéaires de I_3 et C, c'est donc une combinaison linéaire de I_3 et C. Ceci démontre que $M^{2k+3} = MM^{2k+2}$ est magique d'après la question 2.(c).

$$\boxed{M \in \mathcal{MG}_3 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}, \text{ impair}, \ M^p \in \mathcal{MG}_3}$$

3. Puisqu'il s'agit d'étudier les puissances de T, commençons par calculer T^2 :
$$T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = T + 2I_4$$
On continue : $T^3 = T^2T = (T+2I_4)T = T^2 + 2T = (T+2I_4) + 2T = 3T + 2I_4$.
Ceci nous pousse à démontrer par récurrence sur $k \geq 2$ que :
$$\mathcal{H}_k \ : \ T^k = \alpha_k T + \beta_k I_4 \text{ où } (\alpha_k, \beta_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$$
▶ Pour $k = 2$, on a $T^2 = T + 2I_4$. Dans ce cas $\alpha_2 = 1$ et $\beta_2 = 2$ qui sont bien strictement positifs.
▶ Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie, c'est-à-dire que $T^k = \alpha_k T + \beta_k I_4$ où $(\alpha_k, \beta_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Il vient :
$$T^{k+1} = T^kT = (\alpha_k T + \beta_k I_4)T = \alpha_k T^2 + \beta_k T = \alpha_k(T + 2I_4) + \beta_k T = \underbrace{(\alpha_k + \beta_k)}_{\alpha_{k+1}} T + \underbrace{\alpha_k}_{\beta_{k+1}} I_4$$
Ce qui démontre bien que T^{k+1} est une combinaison linéaire de T et I_4 avec des coefficients strictement positifs.
Ceci achève la récurrence.
Soit $k \geq 2$, supposons par l'absurde que $T^k = \alpha_k T + \beta_k I_4$ soit magique alors comme $\mathcal{MG}_4$ est un sous-espace vectoriel : $T^k - \alpha_k T$ est magique. Ce qui implique que $\beta_k I_4$ magique, comme β_k est non nul ceci est absurde puisque l'identité n'est pas magique.
$$\boxed{\forall k \geq 2, \ T^k \text{ n'est pas magique}}$$

D-Carrés magiques

1. On considère la matrice suivante de $\mathcal{MG}_3$:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
On a : $a_{11} + a_{22} + a_{33} = D(A)$, $a_{13} + a_{22} + a_{31} = D(A)$ et $a_{21} + a_{22} + a_{23} = D(A)$. On somme ces trois égalités et on réordonne les termes :
$$\underbrace{(a_{11} + a_{21} + a_{31})}_{D(A)} + \underbrace{(a_{13} + a_{23} + a_{33})}_{D(A)} + 3a_{22} = 3D(A)$$
Ce qui démontre que :
$$\boxed{D(A) = 3a_{22}}$$

2. (a) La matrice B est magique comme somme de deux matrices magiques. De plus la constante correspondante vaut :
$$D(B) = D(A - a_{22}J) = D(A) - a_{22}D(J) = D(A) - 3a_{22} = 0$$
Ceci nous permet d'affirmer que la somme d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale de B est nulle.
Ceci permet de déduire tous les coefficients de B en fonction de α et β :
$$\boxed{B = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha - \beta & \beta \\ -\alpha + \beta & 0 & \alpha - \beta \\ -\beta & \alpha + \beta & -\alpha \end{pmatrix}}$$
Cette forme a pu être trouvée notamment grâce au coefficient $b_{22} = \dfrac{1}{3}D(B) = 0$, d'après la question 1.

(b) D'après l'énoncé, on a $\gamma = \dfrac{1}{3}D(A) = a_{22}$, c'est-à-dire que $A = B + \gamma J$, d'où :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & -\alpha-\beta+\gamma & \beta+\gamma \\ -\alpha+\beta+\gamma & \gamma & \alpha-\beta+\gamma \\ -\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & -\alpha+\gamma \end{pmatrix} \quad (\bigstar)}$$

(c) En reprenant l'écriture précédente, on a :

$$A = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{T_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{T_2} + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{T_3}$$

Ce qui démontre que $\mathcal{MG}_3 = \mathrm{Vect}(T_1, T_2, T_3)$. On vérifie sans difficulté que (T_1, T_2, T_3) est une famille libre, c'est donc une base de $\mathcal{MG}_3$ et on retrouve ainsi que $\dim(\mathcal{MG}_3) = 3$.

3. Soit $\gamma \in \mathbb{N}$ fixé, afin que la matrice A de la forme $(\bigstar)$ ait tous ses coefficients entiers, il est nécessaire et suffisant que α et β soient entiers. De plus afin que les coefficients soient entiers et positifs, on doit avoir :

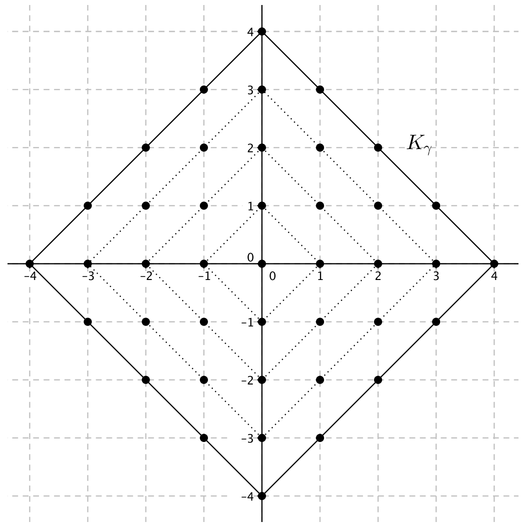
$$\begin{cases} \alpha+\gamma \geq 0 \\ -\alpha-\beta+\gamma \geq 0 \\ \beta+\gamma \geq 0 \\ -\alpha+\beta+\gamma \geq 0 \\ \alpha-\beta+\gamma \geq 0 \\ -\beta+\gamma \geq 0 \\ \alpha+\beta+\gamma \geq 0 \\ -\alpha+\gamma \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma \leq \alpha \leq \gamma & (1) \\ -\gamma \leq \beta \leq \gamma & (2) \\ -\gamma \leq \alpha+\beta \leq \gamma & (3) \\ -\gamma \leq \beta-\alpha \leq \gamma & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha+\beta| \leq \gamma \\ |\alpha-\beta| \leq \gamma \end{cases}$$

Ceci en remarquant que les conditions (1) et (2) se retrouvent en sommant et en faisant la différence des conditions (3) et (4).

$$\boxed{A \in \mathcal{MG}_3 \text{ est à coefficients entiers si et seulement si } |\alpha+\beta| \leq \gamma \text{ et } |\alpha-\beta| \leq \gamma}$$

4. On fixe $D(A) \in \mathbb{N}$. On a la relation $\gamma = a_{22} = \dfrac{D(A)}{3}$, il est donc nécessaire que $D(A)$ soit un multiple de 3.

Plaçons-nous dans la suite dans ce cas-ci et notons comme dans les questions précédentes $\gamma = \dfrac{D(A)}{3}$. Il s'agit de compter le nombre d'entiers naturels α et β vérifiant $|\alpha+\beta| \leq \gamma$ et $|\alpha-\beta| \leq \gamma$. On peut résoudre ce genre de question avec une vision géométrique, on se place dans le plan usuel, on note Ω le point de coordonnées (α, β) et K_γ le carré de sommets $(\gamma, 0), (0, -\gamma), (-\gamma, 0)$ et $(0, \gamma)$, intérieur compris ; comme représenté ci-dessous où $\gamma = 4$.



On a ainsi $|\alpha+\beta| \leq \gamma$ et $|\alpha-\beta| \leq \gamma$ si et seulement si $\Omega \in K_\gamma$.
Il s'agit ainsi de compter le nombre de points à coordonnées entières se trouvant dans ce carré. Sur le bord du carré, il y a $\gamma+1$ points à coordonnées entières sur chaque côté, soit au total $4(\gamma+1)$ auxquels on enlève 4 puisque les sommets ont été comptés 2 fois. Il y a 4γ points à coordonnées entières sur le bord de K_γ.
Un point de coordonnées entières appartient à K_γ si et seulement s'il appartient à l'un des bords de K_i avec $0 \leq i \leq \gamma$, ceci puisqu'il n'y a aucun point à coordonnées entières entre deux bords consécutifs.
Le nombre de points à coordonnées entières de K_γ est :

$$\underbrace{1}_{\text{le point de } K_0} + \sum_{i=1}^{\gamma}(4i) = 1 + 2\gamma(\gamma+1) = 2\gamma^2 + 2\gamma + 1$$

Cette étude montre que le nombre de carrés magiques à coefficients dans $\mathbb{N}$ est

$$\boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } D(A) \not\equiv 0\ [3] \\ \dfrac{2D(A)^2}{9} + \dfrac{2D(A)}{3} + 1 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Pour avoir le nombre de carrés magiques à coefficients dans $\mathbb{N}^*$, on reprend l'étude précédente en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes. En particulier les conditions $|\alpha+\beta| < \gamma$ et $|\alpha-\beta| < \gamma$ reviennent à présent à compter le nombre de points à coordonnées entières dans le carré K_γ, bord exclu. Il y en a :

$$2\gamma^2 + 2\gamma + 1 - 4\gamma = 2\gamma^2 - 2\gamma + 1$$

On en déduit que le nombre de carrés magiques à coefficients dans $\mathbb{N}$ est

$$\boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } D(A) \not\equiv 0\ [3] \\ \dfrac{2D(A)^2}{9} - \dfrac{2D(A)}{3} + 1 & \text{sinon} \end{cases}}$$

5. Notons $A = (a_{ij})$ une matrice magique de taille 3 à coefficients entiers dont les éléments sont les entiers entre 1 et 9 avec chacun qui apparaît une seule fois. La somme de tous les coefficients vaut $3D(A)$ d'une part et $\sum_{i=1}^{9} i = 45$. On en déduit que $D(A) = 15$ et par suite $a_{22} = \dfrac{D(A)}{3} = 5$.

Cherchons à placer le coefficient 1 dans cette matrice. On peut se ramener aux cas où il se trouve en position $(1,1)$ ou en position $(2,1)$. En effet si l'on ne se trouve pas dans l'un de ces deux cas-ci, on peut s'y ramener par une opération qui préserve les matrices magiques de taille 3, plus précisément :

▶ Si $a_{31} = 1$, on effectue une symétrie par rapport à la seconde ligne.

▶ Si $a_{32} = 1$, on effectue une rotation d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre.

▶ Si $a_{33} = 1$, on effectue une symétrie par rapport au coefficient central.

▶ Si $a_{23} = 1$, on effectue une symétrie par rapport à la seconde colonne.

▶ Si $a_{13} = 1$, on effectue une rotation d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

▶ Si $a_{12} = 1$, on effectue une rotation d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

▶ Le cas $a_{22} = 1$ ne peut pas se produire puisque $a_{22} = 5$ comme nous l'avons vu.

On suppose donc, quitte à effectuer l'une de ces transformations que $a_{11} = 1$ ou $a_{21} = 1$.

• Si $a_{11} = 1$ alors $a_{33} = 9$ (puisque la somme doit faire 15). On en déduit que $a_{13} = 15 - a_{23} - a_{33} = 6 - a_{23} < 6$ et même $a_{13} < 5$. Dans ce cas $a_{12} = 15 - a_{11} - a_{13} > 9$ ce qui est impossible. La condition $a_{11} = 1$ ne permet pas de former une solution.

• C'est donc que $a_{21} = 1$. On remplit immédiatement les coefficients manquants pour trouver deux matrices convenant :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

On remarque que ces deux carrés magiques sont symétriques par rapport à la seconde ligne. On obtient les 8 carrés magiques possibles de taille 3 en appliquant les rotations et symétries évoquées précédemment, les voici :

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Si l'on note N_i, le nombre de carrés magiques de taille i comportant une et une seule fois tous les entiers de 1 *à i^2 aux symétries et rotations près. On sait que :*

i	N_i
1	1
2	0
3	1
4	880
5	275305224

On ne connaît pas N_6.