Devoir Surveillé N°8

Intégration
Séries Numériques

Vendredi 17 Mai 2019
Durée : 4 heures
Documents et Calculatrices Interdites

Exercice 1 : Transofrmée de Laplace

On note E l'ensemble des fonctions f réelles définies, continues sur $[0,+\infty[$ et telles que, pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt$ converge absolument.

1. (a) Vérifier que E est un espace vectoriel réel.
   (b) Vérifier que E contient les fonctions continues et bornées sur $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
2. Pour tout élément f de E on note $L(f)$ la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par :
$$L(f)(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt$$
   (a) Vérifier que L est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0,+\infty[$.
   (b) Pour tout λ positif ou nul, on note ϵ_λ la fonction réelle définie par $\epsilon_\lambda(t)=e^{-\lambda t}$ pour tout réel t positif ou nul. Vérifier que, pour tout réel λ positif ou nul, la fonction ϵ_λ est dans E et pour tout réel x strictement positif, calculer $L(\epsilon_\lambda)(x)$.
   (c) Montrer que, pour tout $\lambda\geq 0$ et toute fonction f dans E, la fonction $\epsilon_\lambda f$ est aussi dans E et vérifie, pour tout $x>0$, l'égalité : $L(\epsilon_\lambda f)(x)=L(f)(x+\lambda)$.
3. On considère une fonction H élément de E, de classe C^1, croissante et bornée sur $[0,+\infty[$. Montrer que la fonction H' est aussi dans E et, pour $x>0$, justifier l'égalité :
$$L(H')(x)=-H(0)+xL(H)(x).$$
4. Soit une fonction f élément de E. Pour tout entier naturel n, montrer que la fonction $t\mapsto t^nf(t)$ est aussi dans E.

Exercice 2 :

Pour tout réel $x >$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$

Question préliminaire

Montrer que f(1) est bien définie. On admet par la suite, que $f(1) = \dfrac{\pi^2}{8}$.

1. (a) Pour tout m de $\mathbb{N}$, montrer que : $f(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(2n+1)^2} + \int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Prouver qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{K}{2m+2}$.

   (c) En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

   (d) En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. (a) Prouver que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

   (b) En déduire que $\pi^2 = 10 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$.

3. Dans cette question, on pose $h(t) = \dfrac{2}{t(t+1)(2t+1)^2}$, $S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} h(n)$ et $R_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} h(n)$.

   Le résultat de la question II-2-b s'écrit donc : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\pi^2 = 10 - S_p - R_p$.

   (a) Montrer que h est intégrable sur $[1, +\infty[$ et observer qu'elle est décroissante.

   (b) Pour tout entier p dans $\mathbb{N}^*$, prouver les inégalités : $\displaystyle\int_{p+1}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant R_p \leqslant \int_p^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$

   (c) En déduire que pour tout $p \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{6(p+2)^3} \leqslant R_p \leqslant \dfrac{1}{6p^3}$

   (d) On utilise l'approximation $\pi^2 \approx 10 - S_p - \dfrac{1}{6p^3}$.

   Montrer que l'on commet ainsi une erreur par défaut, majorée par $\dfrac{1}{p^4}$.

Problème de synthèse

INTRODUCTION

L'objet du problème est l'étude de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.
On définit la suite des sommes partielles par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ , } s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

On rappelle que:

- pour tous entiers m et n vérifiant $m \leq n$ on note $[[m,n]]$ l'intervalle d'entiers:

$$[[m,n]] = \{p \in \mathbb{Z}, m \leq p \leq n\}$$

- pour tous entiers m et n vérifiant $m \leq n$ on note $\binom{n}{m}$ le coefficient binomial $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

PRELIMINAIRE

1. Justifier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$. On note donc $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

2. Calculer en fonction de S la somme des deux séries :

$$V = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ , } W = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Partie I : Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos(t))^{2n}\, dt \text{ , } J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 (\cos(t))^{2n}\, dt \text{ , } K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

1. Calculer les intégrales I_0 et I_1.
2. a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par partie, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$$

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

3. Soit $n \geq 1$.

   a) Démontrer la relation
$$I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

   b) En déduire que
$$K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}$$

   c)En déduire que
$$\frac{\pi}{4} s_n = J_0 - K_n$$

4. a) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0, \pi/2]$, on a : $x \leq \dfrac{\pi}{2}\sin(x)$

   b)En déduire que, pour tout entier n, on a :
$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_{n+1}}{4(2n+1)} \text{ , } 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

   c) Retrouver la valeur de S.

Partie 2 : Noyau de Dirchlet

Pour tout entier $n \geq 1$ on note D_n le noyau de Dirichlet,défini par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ , } D_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \neq 0[2\pi]$, on a :
$$D_n(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$ on note L_n l'intégrale :
$$L_n = \int_0^{\pi} x D_n(x) dx$$

   a)Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx$ pour tout entier $k \geq 1$

   b) En déduire que
$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1-(-1)^k}{k^2}$$

   c) En déduire que la suite (L_n) converge et exprimer sa limite en fonction du réel V défini dans le préliminaire.

3. On note f le prolongement par continuité en 0 de la fonction définie sur l'intervalle $]0,\pi]$ par :

$$x \longrightarrow \frac{x}{\sin(x/2)}$$

(3/2) Démontrer que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $[0,\pi]$

(5/2) En étudiant $\dfrac{1}{f}$ montrer que la fonction f est de classe C^∞ sur l'intervalle $[0,\pi]$

4. Soit $\phi \in C^1([0,\pi],\mathbb{R})$. Démontrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)dx\right)=0$$

5. a) Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}(L_n)=0$$

b) Retrouver la valeur de S.

Partie 3 : Calcul d'une série double (Bonus)

L'objet de cette partie est de calculer la limite de la somme double

$$\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}\right)$$

On pose pour tout entier $N \geq 1$:

$$H_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

1. a) Démontrer que pour tout entier $N \geq 1$ on a:

$$\ln(1+N) \leq H_N \leq 1+\ln(N)$$

indication : n'oubliez pas que $\ln(x)$ est une primitive de $\dfrac{1}{x}$

b) En déduire la limite en $+\infty$ de $\dfrac{H_N}{N}$

c) Démontrer que pour tout entier $M \geq 1$ on a :

$$\sum_{m=1}^{M}\frac{H_m}{m(m+1)}=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2}-\frac{H_M}{M+1}$$

indication : décomposer $\dfrac{1}{m(m+1)}$ sous la forme $\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{m+1}$, (a,b) à calculer.

d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{H_m}{m(m+1)}$ converge et déterminer sa somme.

2. Pour tous entier $N \geq 1$ et pour tout entier $m \geq 2$,on pose

$$Z_{N,m} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+m-1)}$$

a) Démontrer que pour tout entier $m \geq 2$

$$Z_{N,m} = \frac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n}\right)$$

indication : décomposer $\dfrac{1}{n(n+m-1)}$ sous la forme $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+m-1}$, (a, b) à calculer.

b) En déduire que

$$\lim_{N\to+\infty} (Z_{N,m}) = \frac{H_{m-1}}{m-1}$$

3. a) Montrer que pour tout entier $N \geq 1$, et pour tout entier $M \geq 2$ on a:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)} = s_N + \sum_{m=2}^{M} \frac{Z_{N,m}}{m}$$

b) En déduite

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)}\right)$$

puis :

$$\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)}\right)\right)$$

Fin

Corrigé Exercice 2 :

(b) L'application $t \mapsto \dfrac{t\ln t}{t^2-1}$ est continue sur $[0,1]$, avec $g(0)=0$ et $g(1)=\frac{1}{2}$.

Elle est donc bornée sur ce segment. Posons $K=\sup\limits_{[0,1]} g(x)$.

On en déduit $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{2m+1}g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant K\int_0^1 t^{2m+1}\,\mathrm{d}t$.

Autrement dit, on a : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{K}{2m+2}$.

Si on fait tendre m vers $+\infty$ dans le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=f(1) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

2. (a) Pour tout entier $m \geqslant 1$, on a les égalités :

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{m}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-\sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{m+1}$$

Il en résulte $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)}=1$. Autrement dit : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

(b) On voit que $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)^2}=\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{4}{(2n+1)^2}$.

On en déduit, pour $m\geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}=2\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)}-8\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Quand on fait tendre m vers $+\infty$, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}-8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=2-8\Big(\frac{\pi^2}{8}-1\Big)=10-\pi^2$$

On a donc bien obtenu l'égalité demandée : $\pi^2=10-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$.

3. (a) L'application h est continue sur $[1,+\infty[$ donc intégrable sur tout segment.

D'autre part $h(t)\sim\dfrac{1}{2t^2}$ au voisinage de $+\infty$. Par comparaison avec les intégrales de Riemann, on sait que cela implique que h est intégrable sur $[1,+\infty[$.

D'autre part, l'application $t\mapsto t(t+1)(2t+1)$ est croissante positive sur $\mathbb{R}^+$.

Il en découle que l'application h est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $[1,+\infty[$.

(b) h étant décroissante, on $\displaystyle\int_n^{n+1}h(t)\,\mathrm{d}t\leqslant h(n)\leqslant\int_{n-1}^{n}h(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n\geqslant 2$.

Soient p,q deux entiers tels que $1\leqslant p<q$.

On somme de $n=p+1$ à $n=q$: $\displaystyle\int_{p+1}^{q+1}h(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=p+1}^{q}h(n)\leqslant\int_p^q h(t)\,\mathrm{d}t$.

Quand $q\to+\infty$, on obtient bien : $\displaystyle\int_{p+1}^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t\leqslant R_p\leqslant\int_p^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t$.

(c) Sur $\mathbb{R}^+$ on a $4t^2\leqslant(2t+1)^2\leqslant4(t+1)^2$ donc $4t^4\leqslant t(t+1)(2t+1)^2\leqslant4(t+1)^2$.

On en déduit, pour tout t de $\mathbb{R}^{+*}$: $\dfrac{1}{2(t+1)^4}\leqslant h(t)\leqslant\dfrac{1}{2t^4}$.

Par intégration, il en découle, pour tout entier $p \geqslant 1$:

– $\displaystyle\int_p^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_p^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^4} = -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{t^3}\right]_p^{+\infty} = \frac{1}{6p^3}$

– $\displaystyle\int_{p+1}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\int_{p+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^4} = -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{(t+1)^3}\right]_{p+1}^{+\infty} = \frac{1}{6(p+2)^3}$

Avec la question précédente, on en déduit : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{6(p+2)^3} \leqslant R_p \leqslant \dfrac{1}{6p^3}$.

(d) On a les équivalences

$$\begin{aligned}\frac{1}{6(p+2)^3} \leqslant R_p \leqslant \frac{1}{6p^3} \quad &\Leftrightarrow \frac{1}{6(p+2)^3} \leqslant 10 - S_p - \pi^2 \leqslant \frac{1}{6p^3}\\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant \pi^2 - \left(10 - S_p - \frac{1}{6p^3}\right) \leqslant \frac{1}{6p^3} - \frac{1}{6(p+2)^3}\end{aligned}$$

En posant $\pi^2 \approx 10 - S_p - \dfrac{1}{6p^3}$ on commet donc une erreur par défaut.

Et cette erreur est majorée par $\Delta_p = \dfrac{1}{6p^3} - \dfrac{1}{6(p+2)^3}$.

Posons $\delta(t) = -\dfrac{1}{6t^3}$: $\exists\, x \in [p, p+2],\ \Delta_p = \delta(p+2) - \delta(p) = 2\delta'(x) = \dfrac{1}{x^4} \leqslant \dfrac{1}{p^4}$.

On a donc prouvé l'encadrement : $0 \leqslant \pi^2 - \left(10 - S_p - \dfrac{1}{6p^3}\right) \leqslant \dfrac{1}{p^4}$.

Corrigé Problème:

PRELIMINAIRE

1. On a une série de Riemann avec $a = 2 > 1$. La série converge
2. Les deux séries $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ et $V = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ convergent . On peut donc dans S séparer les termes pairs et impairs :

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

mais :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{S}{4}$$

donc

$$\boxed{V = \frac{3}{4} S}$$

Puis

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} S - \frac{3}{4} S = -\frac{1}{2} S \end{aligned}$$

$$\boxed{W = -\frac{1}{2} S}$$

Deuxième Partie

1. $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} = \frac{\pi}{4}$$

2. 1. On effectue une intégration par parties : $u(t) = \cos^{2n+1} t, v(t) = \sin t$. u et v sont C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= [\sin(t)\cos^{2n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{2n}(t)\,dt \\ &= (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\cos^{2n}(t)\,dt = (2n+1)(I_n - I_{n+1}) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n}$$

.

2. On a donc :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n)(2n-2)} I_{n-2} = \cdots \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2} I_0 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

qui peut se vérifier par récurrence :

- $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{(0)!}{4^0(0!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $I_n = \frac{(2n)!}{4^n n!^2}\frac{\pi}{2}$ alors

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2n+1}{2n+2}.\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}.\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{I_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}}$$

3. 1. Dans I_n, on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \cos^{2n} t$ et $v(t) = t$ qui sont bien C^1 sur $[0, \pi/2]$

$$I_n = [t\cos^{2n}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $u(t) = \sin t\cos^{2n-1} t$ et $v(t) = \dfrac{t^2}{2}$ qui sont bien C^1 sur $[0, \pi/2]$:

$$\begin{aligned} I_n &= 2n[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{2n}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\left[\cos^{2n}(t) - (2n-1)\sin^2(t)\cos^{2n-2}(t)\right]dt \\ &= -2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\left[\cos^{2n}(t) - (2n-1)\left(1-\cos^2(t)\right)\cos^{2n-2}(t)\right]dt \\ &= -nJ_n + n(2n-1)J_{n-1} - n(2n-1)J_n \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n}$$

2. On multiplie cette égalité par $\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$. Avec la question 2.b),

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\left(n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2J_n\right) \\ &= 2n^2\left\{\frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!}J_{n-1} - \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}J_n\right\} \end{aligned}$$

car :

$$\begin{aligned} \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}.n(2n-1) &= \frac{4.n^2}{(2n)(2n-1)}.\frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!}.n(2n-1) \\ &= 2n^2.\frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!} \end{aligned}$$

En divisant par $2n^2$, on obtient

$$\boxed{K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}}$$

3. On somme pour k allant de 1 à n :

$$\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = K_0 - K_n$$

Or $K_0 = J_0$ donc

$$\boxed{\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = J_0 - K_n}$$

4. 1. Toujours la concavité de sin en comparant la courbe et la corde entre $(0,0)$ et $(\pi/2, 1)$ qui a pour équation $y = \dfrac{2}{\pi}x$. On a donc :

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}],\ x \leq \frac{\pi}{2}\sin(x)$$

2. On élève cette inégalité au carré (tout est positif) et on multiplie par $\cos^{2n}(t) \geq 0$:

$$\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}],\ 0 \leq t^2\cos^{2n}(t) \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^{2n}(t)$$

On intègre cette inégalité entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ (bornes dans le bon sens):

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\cos^{2n}(t)\,dt$$

Dans cette dernière intégrale, on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \sin t$ et $v(t) = \dfrac{-1}{2n+1}\cos^{2n+1} t$ (fontion C^1 sur $[0, \pi/2]$:

d'où

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_{n+1}}{4(2n+1)}$$

On multiplie alors par $\dfrac{4^n (n!)^2}{(2n)!} > 0$ et grâce à 2.b):

$$0 \leq K_n \leq \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{\pi^2}{4(2n+1)} \cdot \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}}$$

3. Par encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0$.

   La question 3.c) donne alors $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{4}{\pi} J_0$. Or $J_0 = \dfrac{\pi^3}{24}$ donc on retrouve $\boxed{s = \dfrac{\pi^2}{6}}$.

Troisième partie

1. D'après la formule d'Euler $\cos kx = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$ et si $x \not\equiv 0[2\pi]$, $e^{ix} \neq 1$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos kx &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right) \text{ car la raison n'est pas 1} \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{ix}\frac{e^{inx/2}.(-2i\sin(\frac{nx}{2}))}{e^{ix/2}.(-2i\sin(\dfrac{x}{2}))}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{i(n+1)x/2}\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\dfrac{x}{2})}\right) \\
&= \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\dfrac{x}{2})}
\end{aligned}$$

d'où

$$D_n(x) = \frac{\sin(\dfrac{x}{2}) + 2\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin(\frac{nx}{2})}{2\sin(\dfrac{x}{2})}$$

Or $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$ et donc $2\cos\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)\sin(\dfrac{nx}{2}) = \sin\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$$\boxed{\forall x \not\equiv 0[2\pi],\ D_n(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}}$$

2. 1. A l'aide d'une intégration par parties, on trouve

$$\boxed{\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}}$$

   2. Par linéarité de l'intégrale,

$$L_n = \int_0^{\pi} \frac{x}{2}dx + \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi} x\cos kx dx$$

   Avec la question précédente, on a

3. On a donc les termes d'indices pairs étant nuls : :

$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - 2\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n->+\infty}(L_n) = \frac{\pi^2}{4} - 2V}$$

3. f est de classe C^1 sur $]0;\pi]$ en tant que quotient de fonctions C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas.
3/2 : comme $\sin(u) \sim_0 u$, on a un prolongement par continuité en 0 et $f(0) = 2$
On a aussi pour $x \in]0;\pi]$,

$$f'(x) = \frac{\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \sim_0 \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1.\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x}{6}$$

En utilisant $\tan(u) =_0 u + \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$.
Par conséquent

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0}$$

f est continue sur $[0;\pi]$, C^1 sur $]0;\pi]$ et f' a une limite finie en 0 donc, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1, f est de classe C^1 sur $[0;\pi]$.
5/2 : On a pour $x \neq 0$:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{\sin(x/2)}{x} = \frac{1}{x}\frac{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k (x/2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}(2k+1)!}x^{2k}.$$

La formule est vraie aussi pour $x = 0$ en prolongeant par continuité..Donc $\dfrac{1}{f}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc C^∞ sur $\mathbb{R}$. Comme g ne prend pas la valeur 0 sur $[0,\pi]$, $f = \dfrac{1}{g}$ est C^∞ sur $[0,\pi]$.

4. Pour $\lambda > 0$, par intégration par parties ϕ et $x -> -\dfrac{\cos(\lambda x)}{\lambda}$ étant bien C^1 sur $[0,\pi]$

$$\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)dx = \frac{\phi(0)}{\lambda} - \frac{\phi(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda} + \int_0^\pi \phi'(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}dx$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)dx\right| &\leq \left|\frac{\phi(0)}{\lambda}\right| + \left|\frac{\phi(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda}\right| + \left|\int_0^\pi \phi'(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}dx\right| \\
&\leq \left|\frac{\phi(0)}{\lambda}\right| + \left|\frac{\phi(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda}\right| + \int_0^\pi |\phi'(x)|\frac{1}{\lambda}dx \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\left\{|\phi(0)| + |\phi(\pi)\cos(\lambda\pi)| + \int_0^\pi |\phi'(x)|\,dx\right\}
\end{aligned}$$

et donc par encadrement :

$$\boxed{\lim_{\to+\infty}\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)dx = 0}$$

remarque : on a vu en TD que la limite reste nulle si f est seulement continue (il suffit d'approcher la fonction uniformément par des polynômes)

5. 1. Pour $n \geq 1, L_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)dx$ et f est de classe C^1 sur $[0;\pi]$
   donc, d'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n = 0$.
   2. On a alors, en passant à la limite dans la relation de la question 2.b), $0 = \dfrac{\pi^2}{4} - 2V$. donc $V = \dfrac{\pi^2}{8}$ et en utilisant le

Quatrième partie

1. 1. Par décroissance de la fonction $t->1/t$ sur $[k,k+1]$ on a

$$\frac{1}{k+1}\leq\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\leq\frac{1}{k}$$

donc en sommant de $k=1$ à n :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leq\ln(n+1)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

on a tout de suite $\ln(N+1)\leq\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=H_N$

l'autre inégalité donne pour $N\geq 2$: $\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k+1}\leq\ln(N)$ et donc avec changement d'indice $\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k}\leq\ln(N)$. On ajoute le premier terme $\frac{1}{1}=1$

la relation restant vraie si $N=1$.

$$\boxed{\ln(1+N)\leq H_N\leq 1+\ln N}$$

2. On divise par $N>0$,

$$\frac{\ln(1+N)}{N}\leq\frac{H_N}{N}\leq\frac{\ln N}{N}$$

Avec le théorème d'encadrement, on peut alors conclure $\boxed{\lim_{N\to+\infty}\frac{H_N}{N}=0}$.

3. Pour $M\geq 1$,on utilise la décomposition classique : $\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{M}\frac{H_m}{m(m+1)} &= \sum_{m=1}^{M}H_m\frac{1}{m(m+1)}=\sum_{m=1}^{M}H_m\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\\ &= \sum_{m=1}^{M}H_m\frac{1}{m}-\sum_{m=1}^{M}H_m\frac{1}{m+1}=\sum_{m=1}^{M}H_m\frac{1}{m}-\sum_{m=2}^{M+1}H_{m-1}\frac{1}{m}\\ &= \frac{H_1}{1}+\sum_{m=2}^{M}(H_m-H_{m-1})\frac{1}{m}-\frac{H_M}{M+1}\\ &= 1+\sum_{m=2}^{M}\frac{1}{m^2}-\frac{H_M}{M+1}=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2}-\frac{H_M}{M+1}\end{aligned}$$

4. On sait que $\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$; de plus $\frac{H_M}{M+1}=\frac{H_M}{M}.\frac{M}{M+1}$ tend vers 0 si M tend vers $+\infty$. Donc :

$$\boxed{\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{H_m}{m(m+1)}=\frac{\pi^2}{6}}$$

2. 1. Pour $(n,m)\in\mathbb{N}^*$, on peut toujours décomposer $\frac{1}{n(n+m-1)}=\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m-1}\right)$ donc, en sommant pour n variant de 1 à N

$$Z_{N,m}=\frac{1}{m-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+m-1}\right)$$

.

Dans la première somme on "change" d'indice en prenant $p=n$ et dans la seconde somme, on change d'indice $p=n+m-1$:

On force alors l'apparition de H_{m-1} dans la seconde expression.

$$Z_{N,m}=\frac{1}{m-1}\left(\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}-\sum_{p=m}^{N+m-1}\frac{1}{p}\right)$$

Les deux premières sommes se simplifient et on obtient

$$\boxed{Z_{N,m} = \frac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \sum_{p=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{p}\right)}$$

Il est aussi possible de dire que pour $N > m-1$: $\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{1}{p} + \sum_{p=m}^{N} \frac{1}{p}$ *et pour* $N < m-1$: $\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{1}{p} - \sum_{p=N+1}^{m-1} \frac{1}{p}$ *. il faut alors rédiger 3 cas.*

2. Quand N tend vers l'infini, $\sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{1}{N+p}$ est la somme de $m-1$ termes tendant vers 0, les bornes étant indépendantes de N, donc $\sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n}$ tend aussi vers 0 et

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} Z_{N,m} = \frac{H_{m-1}}{m-1}}$$

.

3. 1. On permute les deux sommes (nombre fini de termes) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)} &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{nm(n+m-1)} \\
&= \sum_{m=1}^{1}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{nm(n+m-1)} + \sum_{m=2}^{M}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{nm(n+m-1)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^{M} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+m-1)}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^{M} \frac{Z_{N,m}}{m}}$$

2. $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et, pour chaque m entre 2 et M, $\lim_{N\to+\infty} \frac{Z_{N,m}}{m} = \frac{H_{m-1}}{m(m-1)}$. En additionnant ces $1+M-1$ limites, on obtient, avec la question précédente,

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=2}^{M} \frac{H_{m-1}}{m(m-1)}$$

On a alors

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{(m+1)m}$$

et, d'après la question 1.d),

$$\boxed{\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)}\right) = \frac{\pi^2}{3}}$$