Exercice 1

1. (a) $\forall h \in \mathcal{H},\ \forall f \in \mathcal{F},\ h \heartsuit f$
   (b) $\forall f \in \mathcal{F},\ \exists! h \in \mathcal{H},\ f \heartsuit h$
   (c) Il ne faut pas oublier que les deux hommes en question doivent être différents, d'où la condition $h_1 \neq h_2$. Cela donne :
   $$\exists f \in \mathcal{F},\ \exists h_1 \in \mathcal{H},\ \exists h_2 \in \mathcal{H},\ (f \heartsuit h_1 \text{ et } f \heartsuit h_2 \text{ et } h_1 \neq h_2)$$
   (d) $\exists f \in \mathcal{F},\ f \heartsuit f$
   (e) $\exists h \in \mathcal{H},\ \exists h' \in \mathcal{H},\ \exists f \in \mathcal{F},\ (h \heartsuit h' \text{ et } h \heartsuit f)$
   (f) Il faut exprimer le fait que tous les hommes aiment toutes les femmes, que toutes les femmes aiment tous les hommes, que tous les hommes aiment tous les hommes et que toutes les femmes aiment toutes les femmes. Ce qui peut par exemple s'écrire :
   $$\forall h \in \mathcal{H},\ \forall h' \in \mathcal{H},\ \forall f \in \mathcal{F},\ \forall f' \in \mathcal{F},\ (h \heartsuit h' \text{ et } h \heartsuit f \text{ et } f \heartsuit h \text{ et } f \heartsuit f')$$
   Ce qui peut s'écrire de façon condensée avec une union :
   $$\forall x \in \mathcal{H} \cup \mathcal{F},\ \forall y \in \mathcal{H} \cup \mathcal{F},\ x \heartsuit y$$

2. (a) Certaines femmes sont aimées de tous les hommes.
   (b) Tout homme aime au moins une femme.

   Par rapport à la première assertion, seul l'ordre des quantificateurs a changé. On constate que cela change le sens de la phrase.

   (c) Certaines femmes aiment tous les hommes.
   (d) Pour chaque homme, il y a une femme qu'il aime et dont il est aimé.
   (e) Pour chaque homme, il y a une femme qu'il aime mais dont il n'est pas aimé.

(f) Pour chaque homme, il y a une femme qui l'aime et une femme qu'il aime.

Notez la différence par rapport à la question (d), la femme que h aime n'est pas forcément celle qui l'aime.

3. (a)
   - Négation : Brenda n'aime pas Mike ou n'aime pas Dick.
   - Avec des quantificateurs : $B \heartsuit M$ et $B \heartsuit D$.
   - Négation avec des quantificateurs : $B \not\heartsuit M$ ou $B \not\heartsuit D$.

   (b)
   - Négation : Certains hommes n'aiment ni Jenny ni Brenda.
   - Avec des quantificateurs : $\forall h \in \mathcal{H},\ (h \heartsuit J$ ou $h \heartsuit B)$.
   - Négation avec des quantificateurs : $\exists h \in \mathcal{H},\ (h \not\heartsuit J$ et $h \not\heartsuit B)$.

   (c)
   - Négation : Jenny aime un homme.
   - Avec des quantificateurs : $\forall h \in \mathcal{H},\ J \not\heartsuit h$.
   - Négation avec des quantificateurs : $\exists h \in \mathcal{H},\ J \heartsuit h$.

   (d)
   - Négation : Brenda n'aime aucune femme.
   - Avec des quantificateurs : $\exists f \in \mathcal{F},\ B \heartsuit f$.
   - Négation avec des quantificateurs : $\forall f \in \mathcal{F},\ B \not\heartsuit f$.

   (e)
   - Négation : Aucun homme n'aime Brenda et Jenny.
   - Avec des quantificateurs : $\exists h \in \mathcal{H},\ (h \heartsuit B$ et $h \heartsuit J)$.
   - Négation avec des quantificateurs : $\forall h \in \mathcal{H},\ (h \not\heartsuit B$ ou $h \not\heartsuit J)$.

   (f)
   - Négation : Aucun homme n'aime Brenda ou aucun homme n'aime Jenny.
   - Avec des quantificateurs : $(\exists h \in \mathcal{H},\ h \heartsuit J)$ et $(\exists h \in \mathcal{H},\ h \heartsuit B)$.
   - Négation avec des quantificateurs : $(\forall h \in \mathcal{H},\ h \not\heartsuit J)$ ou $(\forall h \in \mathcal{H},\ h \not\heartsuit B)$.

4. (a)
   i. $\forall h \in \mathcal{H},\ (B \heartsuit h \Rightarrow J \heartsuit h)$

   ii. $\forall h \in \mathcal{H},\ (h \heartsuit B$ et $h \heartsuit J) \Rightarrow D \not\heartsuit h$

   iii. Cette phrase signifie d'une part que Brenda et Jenny aiment Mike : $B \heartsuit M$ et $J \heartsuit M$. D'autre part, c'est le seul, c'est-à-dire que si une homme est aimé de Brenda et Jenny alors c'est Mike :
   $\forall h \in \mathcal{H},\ (B \heartsuit h$ et $J \heartsuit h) \Rightarrow h = M$. Finalement, on obtient :

   $$(B \heartsuit M \text{ et } J \heartsuit M) \text{ et } (\forall h \in \mathcal{H},\ (B \heartsuit h \text{ et } J \heartsuit h) \Rightarrow h = M)$$

   iv. Soit $h \in \mathcal{H}$ pour exprimer que h est homosexuel, on peut écrire : $\exists h' \in \mathcal{H},\ h \heartsuit h'$. On a alors :

   $$\forall h \in \mathcal{H},\ (h \not\heartsuit B \text{ et } h \not\heartsuit J) \Rightarrow (\exists h' \in \mathcal{H},\ h \heartsuit h')$$

   (b)
   i. Mike aime toutes les femmes qui l'aiment.

   ii. Si toutes les femmes aiment Mike alors Mike aime toutes les femmes.

   iii. Jenny n'aime pas les hommes qui aiment Brenda.

   iv. Si Jenny aime un homme, il s'agit de Mike.

   On remarque que cela ne signifie pas que Jenny aime Mike, peut-être que celle-ci n'aime personne ou que des femmes.

   v. Les hommes qui aiment toutes les femmes aiment aussi Jenny.

   vi. Tout homme qui aime une femme aime Jenny.

5. (a) i. Il existe un homme que Brenda aime mais pas Jenny .
   ii. Dick aime un homme qui aime Brenda et Jenny.
   iii. Certains hommes, autres que Mike, sont aimés de Brenda et Jenny, ou Mike n'est pas aimé de Brenda ou Mike n'est pas aimé de Jenny.
   iv. Certains hommes n'aiment ni Brenda ni Jenny mais ne sont pas homosexuels.

   (b) i. $\exists f \in \mathcal{F},\ (f \heartsuit M \text{ et } M \not\heartsuit f)$
   ii. $(\forall f \in \mathcal{F},\ f \heartsuit M)$ et $(\exists f \in \mathcal{F},\ M \not\heartsuit f)$
   iii. $\exists h \in \mathcal{H},\ (h \heartsuit B)$ et $(J \heartsuit h)$
   iv. $\exists h \in \mathcal{H},\ (J \heartsuit h)$ et $(h \neq M)$
   v. $\exists h \in \mathcal{H},\ (\forall f \in \mathcal{F},\ h \heartsuit f)$ et $h \not\heartsuit J$
   vi. $\exists h \in \mathcal{H},\ (\exists f \in \mathcal{F},\ h \heartsuit f)$ et $h \not\heartsuit J$

Problème

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme somme et quotient de fonctions usuelles qui sont dérivables sur $]-1,+\infty[$. Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a :

$$h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{nx+n+1}{(1+x)^2}$$

Or $x > -1$ donc $nx > -n$ et par suite $nx + x > 0$. On en déduit que le numérateur de h_n' est strictement positif sur $]-1,+\infty[$, d'où h_n' est strictement positive sur $]-1,+\infty[$.

$$\boxed{h_n \text{ est strictement croissante sur }]-1,+\infty[}$$

(b) On a $h_n(0) = 0$ et h_n strictement croissante sur $]-1,+\infty[$, ce qui nous donne le signe de h_n :

$$\boxed{h_n \text{ est négative sur }]-1,0] \text{ et } h_n \text{ est positive sur } [0,+\infty[}$$

(c) i. Pour $n = 1$, on a $f_1 : x \mapsto x\ln(1+x)$. Cette fonction est clairement dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a :

$$f_1'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = h_1(x)$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[,\ f_1'(x) = h_1(x)}$$

ii. On connait le signe de h_1 d'après la question 1.(b), on en déduit le signe de f_1 et par suite :

$$\boxed{f_1 \text{ est strictement décroissante sur }]-1,0] \text{ et } f_1 \text{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

i. La fonction f_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a :

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}\left(n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) = x^{n-1}h_n(x)$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[,\ f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x)}$$

ii. Le signe de x^{n-1} pour $x \in]-1,+\infty[$ dépend de la parité de n. Plus précisément, on a :

n pair :

x	-1		0		
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
x^{n-1}		$-$	0	$+$	
f_n'		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

n impair :

x	-1		0		
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
x^{n-1}		$+$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour les limites en -1, on a pour $n \geq 2$:

- si n est pair, $\lim\limits_{x \to -1} x^n = 1$ et $\lim\limits_{x \to -1} \ln(1+x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$.
- si n est impair, $\lim\limits_{x \to -1} x^n = -1$ et $\lim\limits_{x \to -1} \ln(1+x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$.

Dans les deux cas, la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_{f_n}$.

La limite en $+\infty$ ne pose pas de problème. Il n'y a pas d'asymptote en $+\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{n-1} \ln(1+x) = +\infty$ car $n \geq 2$.

2. (a) i. Soit $x \in [0,1]$. Pour effectuer le calcul proposé, on peut réduire le membre de droite au même dénominateur puis identifier. Voici une autre méthode :

$$\forall x \in [0,1], \ \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\boxed{\text{On peut choisir } a = 1, \ b = -1 \text{ et } c = 1}$$

ii. On utilise la décomposition trouvée à la question précédente pour faire ce calcul :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)\right]_0^1$$

En simplifiant, cela donne :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \ln(2) - \frac{1}{2}}$$

iii. On doit calculer $U_1 = \displaystyle\int_0^1 x \ln(1+x) dx$. Nous allons utiliser la méthode d'intégration par parties, que l'on verra prochainement en cours et qui est présentée à la page 29 du document de pré-rentrée. On pose :

$$v(x) = \ln(1+x) \qquad v'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$u'(x) = x \qquad u(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Les fonctions u, v, u' et v' sont continues sur $[0,1]$, on a ainsi :

$$\int_0^1 x \ln(1+x) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x)} dx = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{1}{4}$$

Ceci en utilisant le résultat obtenu à la question précédente.

$$\boxed{U_1 = \frac{1}{4}}$$

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on a $x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \leq 0$ et $\ln(1+x) \geq 0$. On en déduit que $(x^{n+1} - x^n) \ln(1+x) \leq 0$, c'est-à-dire $x^{n+1} \ln(1+x) \leq x^n \ln(1+x)$. On intègre cette inégalité sur $[0,1]$, par croissance de l'intégrale, il vient :

$$U_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \ln(1+x) dx \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx = U_n$$

$$\boxed{(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$$

ii. Soit $x \in [0,1]$, on a $1+x \leq 2$ donc par croissance de la fonction ln, $\ln(1+x) \leq \ln(2)$. On multiplie par x^n qui est positif pour obtenir $0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)$. Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2)dx = \ln(2)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq U_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}}$$

iii. En utilisant l'inégalité précédente et le théorème d'encadrement, étant donné que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 0}$$

(c) i. On fixe $x \in [0,1]$ et $n \geq 2$. On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x$, on applique la formule sachant que $x \neq -1$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}}$$

ii. On intègre l'égalité précédente entre 0 et 1 sachant que, par linéarité de l'intégrale, l'intégrale d'une somme est égale à la somme des intégrales. D'une part, pour le membre de gauche :

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\right)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

D'autre part, pour le membre de droite : $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}\right)dx =$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}dx = \ln(2) + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}dx$$

On en déduit la formule annoncée :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx}$$

iii. Soit $n \geq 2$, on a : $U_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$.
Pour faire ce calcul, on va effectuer une intégration par parties en posant :

$$v(x) = \ln(1+x) \qquad v'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$u'(x) = x^n \qquad\qquad u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Les fonctions u, u', v et v' sont continues sur $[0,1]$, on obtient :

$$U_n = \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}dx = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \qquad (2)$$

Cette dernière intégrale peut s'exprimer à l'aide de la question précédente et l'on a :

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx = (-1)^n\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} - \ln(2)\Big) \qquad (2)$$

En combinant les égalités (1) et (2), il vient :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ U_n = \frac{\ln(2)}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\Big(\ln(2) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\Big)}$$