Devoir Maison N°1

Logie Sommes

Exercice 1

• Dans cet exercice, on note $\mathcal{H}$ l'ensemble des hommes et $\mathcal{F}$ l'ensemble des femmes.

Pour $h \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{F}$, on note $h \heartsuit f$ lorsque h aime f. De même, on notera $f \heartsuit h$ lorsque f aime h et similairement pour deux hommes ou deux femmes. La négation de cette relation sera noté $\not\heartsuit$, ainsi $h \not\heartsuit f$ signifie que h n'aime pas f.

• À titre d'exemple, traduisons avec des quantificateurs la phrase "chaque homme est amoureux d'une femme". Cette phrase signifie que pour chaque homme h, il existe une femme f telle que h aime f, c'est-à-dire :

$$\forall h \in \mathcal{H},\ \exists f \in \mathcal{F},\ h \heartsuit f$$

Dans tout le problème, on ne se préoccupera pas de savoir si les assertions considérées sont vraies ou fausses. En effet, dans l'exemple ci-dessus, il ne nous importe pas de savoir s'il est vrai que chaque homme est amoureux d'une femme.

• On rappelle qu'en mathématiques, "une" signifie "au moins une" et non pas "exactement une".

1. **Thème.** Écrire les assertions suivantes sous forme de formules mathématiques.
   (a) Tous les hommes aiment toutes les femmes.
   (b) Chaque femme aime un unique homme.
   (c) Certaines femmes aiment deux hommes.
   (d) Il existe une femme amoureuse d'elle-même.
   (e) Certains hommes aiment un homme et une femme.
   (f) Tout le monde aime tout le monde.
2. **Version.** Écrire une phrase en français qui traduit les assertions suivantes.
   (a) $\exists f \in \mathcal{F},\ \forall h \in \mathcal{H},\ h \heartsuit f$
   (b) $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F},\ h \heartsuit f$
   (c) $\exists f \in \mathcal{F},\ \forall h \in \mathcal{H},\ f \heartsuit h$
   (d) $\forall h \in \mathcal{H},\ \exists f \in \mathcal{F},\ (h \heartsuit f \text{ et } f \heartsuit h)$
   (e) $\forall h \in \mathcal{H},\ \exists f \in \mathcal{F},\ (h \heartsuit f \text{ et } f \not\heartsuit h)$
   (f) $\forall h \in \mathcal{H},\ (\exists f \in \mathcal{F},\ h \heartsuit f) \text{ et } (\exists f \in \mathcal{F},\ f \heartsuit h)$
3. **Négations.** On considère à présent deux femmes, Brenda et Jenny et deux hommes, Mike et Dick. On désignera chaque personnage par son initiale. Ainsi les variables B, J, M et D sont déjà définies dans l'énoncé, il sera inutile d'écrire par exemple "$\exists M \in \mathcal{H}$". Pour chacune des phrases suivantes, écrire la négation en français, écrire la phrase avec des quantificateurs et écrire la négation avec des quantificateurs.

   (a) Brenda aime Mike et Dick.
   (b) Tous les hommes aiment Jenny ou Brenda.
   (c) Jenny n'aime aucun homme.
   (d) Brenda aime une femme.
   (e) Certains hommes aiment Brenda et Jenny.

(f) Certains hommes aiment Brenda et certains hommes aiment Jenny.

4. **Implications.**

   (a) Traduire en formules mathématiques les assertions suivantes.

      i. Jenny aime tous les hommes qu'aime Brenda.
      ii. Dick n'aime pas les hommes qui aiment à la fois Brenda et Jenny.
      iii. Mike est le seul homme aimé à la fois de Brenda et Jenny.
      iv. Un homme qui n'aime ni Brenda ni Jenny est homosexuel.

   (b) Traduire les assertions suivantes en français.

      i. $\forall f \in \mathcal{F},\ (f \heartsuit M \Rightarrow M \heartsuit f)$
      ii. $(\forall f \in \mathcal{F},\ f \heartsuit M) \Rightarrow (\forall f \in \mathcal{F},\ M \heartsuit f)$
      iii. $\forall h \in \mathcal{H},\ (h \heartsuit B) \Rightarrow (J \not\heartsuit h)$
      iv. $\forall h \in \mathcal{H},\ (J \heartsuit h) \Rightarrow (h = M)$
      v. $\forall h \in \mathcal{H},\ (\forall f \in \mathcal{F},\ h \heartsuit f) \Rightarrow h \heartsuit J$
      vi. $\forall h \in \mathcal{H},\ (\exists f \in \mathcal{F},\ h \heartsuit f) \Rightarrow h \heartsuit J$

Problème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans tout le problème, on considère les fonctions :

$$\begin{array}{rccc} f_n & : &]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^n \ln(1+x) \end{array}$$

1. **Étude des fonctions** f_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

   (a) Étudier le sens de variation des fonctions h_n.
   (b) Calculer $h_n(0)$ et en déduire le signe de h_n.
   (c) Étude du cas particulier où $n = 1$.
      i. Justifier que f_1 est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
      ii. En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1,+\infty[$.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
      i. Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1,+\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
      ii. En déduire les variations de f_n sur $]-1,+\infty[$, on pourra distinguer les cas n pair et n impair. On précisera les limites aux bornes de l'ensemble de définition en étudiant d'éventuelles asymptotes.

2. **Étude d'une suite.** On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.
   (a) **Calcul de U_1.**
      i. Prouver l'existence de trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in [0,1],\ \dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
      ii. En déduire la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$.
      iii. En déduire la valeur de U_1.
   (b) **Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**
      i. Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
      ii. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq U_n \leq \dfrac{\ln(2)}{n+1}$.
      iii. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) **Calcul de U_n pour $n \geq 2$.** Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

      i. Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.
      ii. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.
      iii. En déduire que :

$$U_n = \frac{\ln(2)}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right)$$