

Matrices

Devoir Maison

Problème 1

Soit p un réel fixé de l'intervalle $]0; 1[: 0 < p < 1$.

On définit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}$$

Partie 1

- Calculer A^2 . Que vaut A^0 ?
- Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}$$

Pour cela, on utilisera la relation $A^{n+1} = A^n A$ et on exhibera les expressions a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n (obtenues en cours de la preuve).

- La suite $(c_n)_n$ ainsi construite est une suite "classique" : de quel type est-elle ?
En déduire l'expression de c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
- Étude de la suite $(a_n)_n$.
 - Montrer que la suite $(a_n)_n$ vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2 a_n = 0$$

- Exprimer a_n en fonction de n .

- On pose la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note \mathcal{C} l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MU = U$.

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid MU = U\}$$

- Soit la proposition $\mathcal{P} : "M \in \mathcal{C}, N \in \mathcal{C} \Rightarrow M + N \in \mathcal{C}"$, cette proposition est-elle vraie ?
- Montrer :

$$M \in \mathcal{C}, N \in \mathcal{C} \Rightarrow MN \in \mathcal{C}$$

- On pose $T = {}^t A$, la transposée de la matrice A .
Montrer que $T \in \mathcal{C}$ puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n \in \mathcal{C}$.
- Quelle égalité a-t-on entre T^n et A^n ?
- En déduire, connaissant une expression de a_n , que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n$$

Partie 2

On définit les matrices :

$$B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 1-p & 1-p & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On souhaite calculer A^n d'une autre façon. On définit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
- Calculer $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.
- En déduire une expression de B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
- Calculer C^2 .
- En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction des puissances des matrices de B et C .
- Retrouver A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Problème 2

Partie 1

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On rappelle que $\det(M) = ad - bc$ est le déterminant de M .

1. Montrer que M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$.
2. Soit $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.
3. En déduire que, si M est une matrice inversible, $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$.

Partie 2

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ carrées d'ordre 2 à coefficients dans l'anneau \mathbb{Z} des entiers relatifs.

Dans toute la suite du problème, les lettres a, b, c, d désignent des éléments de \mathbb{Z} et on note : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ est un anneau.
2. On note $GL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
 - (a) Rappeler la définition d'un élément inversible dans un anneau. Donner les inversibles de $\mathbb{Z} : \mathbb{Z}^\times$.
 - (b) Démontrer que l'ensemble $GL_2(\mathbb{Z})$ des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication, appelé le groupe des unités de l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
 - (c) En utilisant la partie 1, montrer que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) \in \mathbb{Z}^\times$.
 - (d) En déduire que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \text{ si et seulement si } |ad - bc| = 1.$$

3. On pose

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

- (a) Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{Z}), \times)$.
- (b) Trouver un couple d'entiers $(c_0, d_0) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $3c_0 - 5d_0 = 1$.
- (c) En déduire que l'ensemble des couples d'entiers $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $SL_2(\mathbb{Z})$ sont exactement les couples d'entiers (c, d) tels que $c = c_0 + 5k$ et $d = d_0 + 3k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
- (d) Déterminer l'ensemble des couples $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $GL_2(\mathbb{Z})$.
- (e) Quelle est la condition nécessaire et suffisante portant sur le couple (a, b) de \mathbb{Z}^2 pour qu'il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $GL_2(\mathbb{Z})$?

Problème 1

Corrigé

1. $A^2 = \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 \\ 2p(1-p) & p^2 & 0 \\ (1-p)^2 & 1-p^2 & 1 \end{pmatrix}$. $A^0 = I_3$.

2. On procède par récurrence :

Initialisation : Pour $n = 0$, le résultat est trivial avec $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ car $A^0 = I_3$.

Hérédité : Soit n tel que la propriété est vraie. Montrons le pour $n + 1$.

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{n+1} & 0 & 0 \\ pa_n + p^n(1-p) & p^{n+1} & 0 \\ pb_n + (1-p)c_n & pc_n + 1-p & 1 \end{pmatrix}$$

Le résultat est donc vrai en posant $a_{n+1} = pa_n + p^n(1-p)$, $b_{n+1} = pb_n + (1-p)c_n$ et $c_{n+1} = pc_n + 1-p$.

3. $(c_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique donc, pour tout n , $c_n = p^n(0-1) + 1 = 1 - p^n$.

4. (a) Pour tout n , $a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2a_n = pa_{n+1} + p^{n+1}(1-p) - 2pa_{n+1} + p^2a_n = -pa_{n+1} + p^{n+1}(1-p) + p^2a_n = -p^2a_n - p^{n+1}(1-p) + p^{n+1}(1-p) + p^2a_n = 0$

(b) On a donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, l'équation caractéristique est $x^2 - 2px + p^2 = 0$ qui admet pour unique solution double p . Donc, pour tout n , $a_n = (\lambda n + \mu)p^n$ or $a_0 = 0$ donc $\mu = 0$ et $a_1 = 1-p$ donc $\lambda = \frac{1-p}{p}$ et finalement, $a_n = np^{n-1}(1-p)$.

5. (a) On a $MU = U$ et $NU = U$ donc $(M + N)U = MU + NU = U + U = 2U$ donc la proposition est fautive.

(b) $(MN)U = M(NU) = MU = U$ donc $MN \in \mathcal{C}$

(c) $T = {}^tA = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $TU = \begin{pmatrix} p+1-p \\ p+1-p \\ 1 \end{pmatrix} = U$. D'après la question précédente, $T^2 = T \times T \in \mathcal{C}$ et donc par récurrence, $T^n \in \mathcal{C}$.

(d) $T^n = {}^t(A^n)$.

(e) D'après les deux questions précédentes, $T^n = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T^n U = U$ donc $p^n + a_n + b_n = 1$ donc

$$b_n = 1 - p^n - a_n = 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n.$$

6. (a) On effectue $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ et P est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $L_3 \leftarrow L_2 + L_3$ pour obtenir $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est clairement inversible car les trois coefficients de la diagonale sont non nuls (et c'est une matrice triangulaire supérieure). En effectuant les mêmes transformations, on résout $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On

obtient $z = a + b + c$, $y = -b$ et $x = a + b$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $BP = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 1-p & 1-p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & p & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ -p & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & p & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ -p & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 qui est diagonale.

(c) $B = PDP^{-1}$, $B^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & (-p)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} p^n & (-p)^n & 0 \\ 0 & -(-p)^n & 0 \\ -p^n & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} p^n & p^n - (-p)^n & 0 \\ 0 & (-p)^n & 0 \\ 1-p^n & 1-p^n & 1 \end{pmatrix}$

(d) $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(e) Remarquons que $BC = CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p(1-p) & 0 & 0 \\ -p(1-p) & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc on peut appliquer le binôme de Newton,

$$A^n = (C + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C^k B^{n-k} = B^n + nCB^{n-1}$$

(f) $A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ np^{n-1}(1-p) & p^n & 0 \\ 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n & 1-p^n & 1 \end{pmatrix}$.

Problème 2

Partie 1

1. cf cours

2. On a $MN = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} \det(MN) &= (aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') \\ &= aa'cb' + aa'dd' + bc'cb' + bc'dd' - ab'ca' - ab'dc' - bd'ca' - bd'dc' \\ &= aa'dd' + bc'cb' - ab'dc' - bd'ca' \end{aligned}$$

$$\text{or } \det(M) \times \det(N) = (ad - bc)(a'd' - b'c') = aa'dd' + bb'cc' - adb'c' - a'd'bc$$

d'où le résultat.

3. Si M est inversible alors $MM^{-1} = I_2$ donc $\det(M)\det(M^{-1}) = \det(I_2) = 1$ et $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$.

Partie 2

1. $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ est clairement un sous anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. (a) cf cours

(b) cf cours (l'ensemble des inversible A^\times est un groupe)

(c) D'après la Partie 1, M est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ssi $\det(M) \neq 0$. Mais si l'inverse est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, on obtient $\det(M)\det(M^{-1}) = 1$ avec $\det(M)$ et $\det(M^{-1})$ dans \mathbb{Z} donc M inversible ssi $\det(M) \in \mathbb{Z}^\times$.

(d) Comme les inversibles de \mathbb{Z} sont 1 et -1 , on a bien M inversible ssi $|\det(M)| = 1$ ssi $|ad - bc| = 1$.

3. (a) - $I_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$.

- Si M et N sont dans $SL_2(\mathbb{Z})$ alors $\det(MN) = \det(M)\det(N) = 1 \times 1 = 1$ donc $MN \in SL_2(\mathbb{Z})$.

- Si $M \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\det(M) = 1$ donc M est inversible d'après la question précédente. Et $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} = 1$ donc $M^{-1} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

(b) $c_0 = 2$ et $d_0 = 1$ conviennent.

(c) La matrice appartient à $SL_2(\mathbb{Z})$ ssi $3c - 5d = 1$ ssi $3c - 5d = 3c_0 - 5d_0$ ssi $5(d - d_0) = 3(c - c_0)$. 5 et 3 sont premiers entre eux donc par le lemme de Gauss, il existe $k \in \mathbb{Z}$, $d = 1 + 3k$ et $c = 2 + 5k$.

(d) cf ci-dessus.

(e) D'après Bezout, si et seulement si $a \wedge b = 1$.