MPSI - El Bilia Sup

Prof MAMOUNI

DM : Espaces Vectoriels

Special Confinement

objectif : Mq $(f_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre ds $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ où $f_k(x) = \cos kx$

(I) Raisonner par recurrence sur $n \in \mathbb{N}$

(II)

1) Mq $(e^{ikx})_{-n\leq k\leq n}$ libre ds $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

2) On suppose $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos kx = 0$ où $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

i) Mq $\sum_{k=-n}^{n} \lambda_{|k|} e^{ikx} = 0$

ii) En deduire $\lambda_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$

iii) Conclure

(III) Polynomes de degrés echelonnés

1) Soit $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tq $\deg P_k = k$ $\forall k \in \mathbb{N}$

mq $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ libre ds $\mathbb{R}[X]$

2) On pose $\boxed{T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X \quad T_{n+1}(X) = 2X\,T_n(X) - T_{n-1}(X)}$

Tchebechev

i) Mq $\deg T_k = k$ $\forall k \in \mathbb{N}$

ii) Mq $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

3) En deduire que $(\cos kx)_{0\leq k\leq n}$ libre