Espaces Vectoriels
Intégration I (Segment)

Devoir Maison (CCP 2018)

Spécial Confinement

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ESTIMATIONS NUMÉRIQUES D'INTÉGRALES

Notations

— Si f est une fonction réelle bornée sur $[a,b]$ avec $a<b$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

— On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pourra confondre les expressions « polynômes » et « fonctions polynomiales ».

Partie II - Notion de polynôme interpolateur

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans $[a,b]$, deux à deux distincts.

On appelle polynôme interpolateur de f aux points x_i, un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i, c'est-à-dire tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$.

II.1 - Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier i de $[\![0,n]\!]$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{X-x_k}{x_i-x_k}.$$

On pose :

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(X).$$

Q7. Démontrer que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i, puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

II.2 - Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q8. *Informatique* : si $y_0, \dots, y_n$ sont des réels, le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(X)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout i. Écrire en langage Python une fonction `lagrange` qui prend en arguments x une liste de points d'interpolations x_i, y une liste d'ordonnées y_i de même longueur que x, a un réel, et qui renvoie la valeur de P en a.
Par exemple, si `x = [-1, 0, 1]` et `y = [4, 0, 4]`, on montre que $P = 4X^2$ et donc $P(3) = 36$. Ainsi, `lagrange(x, y, 3)` renverra 36.

Q9. *Informatique* : chercher le polynôme interpolateur $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ de f aux points x_i revient aussi à résoudre le système linéaire suivant d'inconnues $a_0, \dots, a_n$:

$$\begin{cases} P(x_0) & = & f(x_0) \\ \quad \vdots & & \\ P(x_n) & = & f(x_n) \end{cases} \iff V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

où V est une matrice carrée de taille $n+1$.
Déterminer la matrice V et indiquer la complexité du calcul en fonction de n, lorsque l'on résout ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

II.3 - Expression de l'erreur d'interpolation

On suppose, en plus dans cette partie, que f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i.

On note $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolations et π_σ le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par :

$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i).$$

On veut démontrer pour tout réel $x \in [a, b]$, la propriété suivante notée $\mathcal{P}_x$:

$$\exists c_x \in]a, b[, \quad f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \pi_\sigma(x).$$

Q10. Résultat préliminaire : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction p-fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$.

Q11. Justifier que pour tout $x \in \sigma$, la propriété $\mathcal{P}_x$ est vraie.

On fixe x un réel de $[a, b]$ qui n'est pas dans σ. Soit λ un réel. On définit sur $[a, b]$ une application F par :

$$F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda \pi_\sigma(t).$$

Q12. Déterminer un réel λ de sorte que $F(x) = 0$. On choisira alors λ de cette façon.

Q13. Démontrer que F s'annule $n+2$ fois et en déduire que $\mathcal{P}_x$ est vraie.

Q14. Justifier que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a, b]$ et en déduire un réel positif K indépendant de n tel que :

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty .$$

Q15. En déduire que si f est la fonction sinus, la suite $(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$.

Q16. On définit f sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Démontrer à l'aide d'une série entière que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left\|f^{(2k)}\right\|_\infty \geqslant (2k)!.$$

Cette dernière inégalité montre que la quantité $\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$ peut être grande et cela peut empêcher parfois la convergence de la suite de polynômes interpolateurs. Ceci est appelé le phénomène de Runge.

Partie IV - Méthodes de quadrature

Dans cette partie, nous allons voir comment les polynômes interpolateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour estimer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour cela, on choisit d'abord une subdivision $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ de l'intervalle $[a, b]$. À cause du phénomène de Runge, si N est grand, le polynôme interpolateur de f aux points x_i n'est pas forcément une bonne approximation de f. Approximer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par $\displaystyle\int_a^b L_N(f)(x)\,\mathrm{d}x$ n'est donc pas forcément pertinent...

Nous allons en fait approximer f par un polynôme d'interpolation sur chaque petit intervalle $[x_k, x_{k+1}]$.

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Q21. Justifier que :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x_{k+1}-x_k}{2} \int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } g(t) = f\left(x_k + (t+1)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right).$$

On est donc ramené à estimer $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$ où $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

On se donne $n+1$ points $t_0, t_1, \ldots, t_n$ dans $[-1, 1]$, deux à deux distincts.

On rappelle que $L_n(g) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} g(t_i) l_i(X)$ est le polynôme interpolateur de g aux points t_i et on pose :

$$J(g) = \int_{-1}^{1} L_n(g)(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i g(t_i) \text{ avec } \alpha_i = \int_{-1}^{1} l_i(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lorsqu'on approxime $\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$ par $J(g)$, c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i g(t_i),$$

on dit que J est une méthode de quadrature associée aux points $t_0, \ldots, t_n$ et aux poids $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$.

Q22. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t$.

On dit que la méthode de quadrature J est d'ordre au moins n car la formule approchée est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Q23. Exemple : on prend $n = 1$, $t_0 = -1$ et $t_1 = 1$. Déterminer α_0 et α_1. Expliquer à l'aide d'un graphique en prenant g positive pourquoi, dans ce cas, la méthode J s'appelle la « méthode des trapèzes ».

Quadrature de Gauss

Dans les deux questions suivantes, on prend pour points d'interpolation $t_0, t_1, \ldots, t_n$ les $(n+1)$ racines du polynôme de Legendre P_{n+1} introduit dans la partie III.

Nous allons démontrer que, dans ce cas, la formule de quadrature J est d'ordre au moins $2n+1$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. On fait la division euclidienne de P par P_{n+1}, on note respectivement Q le quotient et R le reste de cette division :

$$P = QP_{n+1} + R.$$

Q24. Démontrer que $J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$, puis conclure que $J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t$.

Q25. Démontrer que les poids $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ associés à la quadrature de Gauss sont strictement positifs et calculer leur somme.

CORRIGE

2 Notion de polynôme interpolateur

2.1 Existence du polynôme interpolateur

Q. . x est racine de l_i pour $i \neq$ et $l_i(x_i) = 0$, c'est-à-dire

$$l_i(x\ ) = ﬃ_i$$

On en déduit que

$$2\ [\![0\ \ n]\!]\quad L_n(f)(x\ ) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)ﬃ_i\ = f(x\ )$$

$L_n(f)$ interpole donc f aux points $x_0 ::: x_n$.
Si P est un autre polynôme interpolateur alors $P\quad L_n(f)\ 2\ R_n[\ ]$ s'annule aux points $x_0 ::: x_n$. C'est un polynôme de degré n ayant au moins $n+1$ racines et c'est donc le polynôme nul.

$$\boxed{L_n(f) \text{ est l'unique polynôme interpolateur de } f \text{ aux points } x_0 ::: x_n}$$

2.2 Calcul eectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q. . Une première fonction l(i,x,a) permet le calcul de $l_i(a)$ associé aux x .

```
def l(i,x,a):
    r=1
    for   in range(len(x)):
        if  !=i:
            r=r (a-x[ ]) (x[i]-x[ ])
    return r
```

Il reste à calculer la somme définissant L_n associé aux y_i.

```
def lagrange(x,y,a):
    s=0
    for i in range(len(x)):
        s=s+l(i,x,a) y[i]
    return s
```

Q. . La matrice cherchée est une matrice de Vandermonde :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & ::: & x_0^n \\ 1 & x_1 & ::: & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & ::: & x_n^n \end{pmatrix}$$

On peut d'ailleurs noter que d'après le cours cette matrice est inversible quand les x_i sont deux à deux distincts ce qui permet de prouver à nouveau l'existence et l'unicité d'un polynôme interpolateur.
Dans la résolution par méthode de Gauss,

- on cherche un pivot sur la colonne 1 que l'on ramène en position 1 (n opérations) et on fait appraître des zéros par $n\quad 1$ combinaisons de lignes ($O(n^2)$ opérations)
- on procède de même avec les colonnes 2 $::: n+1$ pour à chaque fois $O(n^2)$ opérations
- on en déduit $x_{n+1} ::: x_0$ en $O(1+2+\quad +(n+1)) = O(n^2)$ opérations.

$$\boxed{\text{La complexité du calcul est } O(n^3)}$$

2.3 Expression de l'erreur d'interpolation

Q.10. Montrons par récurrence (finie) que la propriété : " $(\ )$ s'annule $p+1$ fois" est vraie pour $= 0\ ::: p$.

- Le résultat est vrai au rang 0 par hypothèse sur .
- Soit $2\ [\![0\ p\quad 1]\!]$ tel que le résultat soit vrai au rang . On note $y_1 \quad y_{p+1}$ des points d'annulation de $(\ )$. Par théorème de Rolle appliqué à $(\ )$, $(\ +1)$ s'annule sur $]y_i\ y_{i+1}[$ pour $i = 1\ ::: p$. $(\ +1)$ admet donc au moins p annulations et lerésultat est vrai au rang $+1$.

On en déduit en particulier (propriété au rang p) que $\phi^{(p)}$ s'annule. Ce zéro est strictement entre le minimum et le maximum des éléments de σ et donc dans $]a,b[$.

$$\boxed{\text{si } \phi\ :\ [a,b]\to\mathbb{R} \text{ s'annule } p+1 \text{ fois, il existe } c\in]a,b[\text{ tel que } \phi^{(p)}(c)=0.}$$

Q.11. $f-L_n(f)$ ainsi que π_σ s'annulent en tout point de σ. Pour $x\in\sigma$, $\mathcal{P}_x$ est donc vraie (on peut choisir pour c_x n'importe quel élément de $]a,b[$).

$$\boxed{\text{pour tout } x\in\sigma, \text{ la propriété } \mathcal{P}_x \text{ est vraie}}$$

Q.12. Comme $x\notin\sigma$, $\pi_\sigma(x)\neq 0$ et on peut donc poser

$$\boxed{\lambda=\frac{f(x)-L_n(f)(x)-F(x)}{\pi_\sigma(x)}}$$

et on a alors $F(x)=0$.

Q.13. F s'annule (comme $f-L_n(f)$ et π_σ) en tout point de σ et en $x\notin\sigma$. On a donc $n+1$ points d'annulation au moins.

$$\boxed{F \text{ s'annule } n+2 \text{ fois}}$$

On en déduit avec Q.10 que $F^{(n+1)}$ s'annule en un point $c_x\in]a,b[$. Comme $L_n(f)\in\mathbb{R}_n[X]$, sa dérivée $n+1$-ième est nulle. Comme π_σ est unitaire de degré $n+1$, sa dérivée $n+1$-ième est le polynôme constante $(n+1)!$. On en déduit que $\lambda=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$. Comme $F(x)=0$, on obtient $\mathcal{P}_x$.

$$\boxed{\forall x\in[a,b],\ \mathcal{P}_x \text{ est vraie}}$$

Q.14. $\boxed{f^{(n+1)} \text{ est continue sur le segment } [a,b] \text{ et donc bornée sur ce segment}}$.
On remarque que

$$\forall x\in[a,b],\ |\pi_\sigma(x)|\leq(b-a)^n$$

Avec la propriété $\mathcal{P}_x$, on en déduit que

$$\boxed{\|f-L_n(f)\|_\infty\leq\tfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty}$$

Q.15. On imagine ici que l'on se donne une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de $[0,2\pi]$ et que l'on considère pour chaque n le polynôme $L_n(f)$ associé à $\sigma_n=\{x_0,\dots,x_n\}$. On définit alors une suite de polynômes. Comme sin et toute ses dérivées sont majorées en module par 1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit avec la question précédente que

$$\|f-L_n(f)\|_{\infty,[0,2\pi]}\leq\frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par croissances comparées, le majorant est de limite nulle et ainsi

$$\boxed{(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,2\pi]}$$

Q.16. On sait que

$$\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}$$

Quand une fonction est développable en série entière, son développement est nécessairement celui de Taylor. Ainsi

$$\forall k\in\mathbb{N},\ f^{(2k)}(0)=(-1)^k(2k)!$$

On en déduit que $\|f^{(2k)}\|_\infty\geq|f(0)|\geq(2k)!$ (la norme infinie existe puisque f est de classe C^∞ sur le segment $[-1,1]$).

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \|f^{(2k)}\|_\infty\geq(2k)!}$$

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ on a } J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\, dt}$$

Q.23. On a $l_0 = -\frac{1}{2}(X-1)$ et $l_1 = \frac{1}{2}(X+1)$ et donc (calcul d'intégrale élémentaire)

$$\boxed{\alpha_0 = \alpha_1 = 1}$$

$2\alpha_0 g(0)$ est l'aire du rectangle $[-1,1]\times[0,g(-1)]$ et $2\alpha_1 g(1)$ celle du rectangle $[-1,1]\times[0,g(1)]$. La demi-somme de ces quantités est l'aire du trapèze $((-1,0),(-1,1),(1,g(1)),(-1,g(-1)),(-1,0))$. Ceci explique le nom de la méthode.

Quadrature de Gauss

Q.24. On a d'une part (les t_i sont des racines de P_{n+1})

$$J(QP_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Q(t_i) P_{n+1}(t_i) = 0$$

D'autre part, comme P est de degré $\leq 2n+1$ et P_{n+1} de degré $n+1$, le quotient Q est de degré $\leq n$ et donc orthogonal à P_{n+1}. Ainsi

$$\int_{-1}^{1} P_{n+1} Q(t)\, dt = 0$$

On a donc

$$\boxed{J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^{1} Q(t) P_{n+1}(t)\, dt = 0}$$

Comme J est linéaire, on a aussi $J(P) = J(QP_{n+1}) + J(R)$. De plus $J(R) = \int_{-1}^{1} R(t)\, dt$ car R est de degré $\leq n$. Ainsi

$$J(P) = J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\, dt + \int_{-1}^{1} R(t)\, dt = \int_{-1}^{1} (Q(t)P_{n+1}(t) + R(t))\, dt$$

et donc

$$\boxed{J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\, dt}$$

Q.25. Fixons $i \in [\![0,n]\!]$ et posons $P = \prod_{k\neq i} (X - t_k)^2$. $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et donc

$$\int_{-1}^{1} P(t)\, dt = J(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(t_k) = \alpha_i P(t_i)$$

Comme P est continue, positive et non nulle sur $[-1,1]$, son intégrale sur $[-1,1]$ est > 0. De même $P(t_i) > 0$. Ainsi

$$\boxed{\forall i,\ \alpha_i > 0}$$

On remarque enfin que la somme des α_i vaut $J(1)$ et comme $1 \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $J(1) = \int_{-1}^{1} 1\, dt = 2$.

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 2}$$