Devoir Maison (CNC 2019)

Intégration I (Segment)

PROBLÈME

Définitions et notations

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}-$espace vectoriel des fonctions complexes $2\pi-$périodiques et de classe k sur $\mathbb{R}$.

1.1. Noyau de Dirichlet

Pour tout $(n,\theta) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$, on pose

$$D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $D_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\theta \longmapsto D_n(\theta)$ s'appelle *noyau de Dirichlet.*

1.1.1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application D_n est paire et $2\pi-$périodique.

1.1.2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

1.1.3. Montrer que, pour tout $(n,\theta) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$, $D_n(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin\big((2n+1)\theta/2\big)}{\sin(\theta/2)} & \text{si} \quad \theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2n+1 & \text{si} \quad \theta \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$

1.2. Quelques propriétés des éléments de $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

1.2.1. Justifier que toute fonction $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

1.2.2. Soit $g \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_{a-\pi}^{a+\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t$.

1.3. Lemme de Lebesgue

Soient a et b des réels tels que $a < b$, et soit $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n(h) = \int_a^b h(t)\sin\big((2n+1)t/2\big)\,\mathrm{d}t.$$

1.3.1. Vérifier que si h est une fonction constante, alors la suite $\big(J_n(h)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

1.3.2. Montrer que si h est en escalier sur $[a,b]$, alors la suite $\big(J_n(h)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

1.3.3. En utilisant un résultat d'approximation à préciser, montrer que la suite $\big(J_n(h)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

FIN

1.1.3 Si $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{i\theta} \neq 1$. $\sum_{-n}^{n} e^{ik\theta}$ est la somme de $2n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$, le premier étant $e^{-in\theta}$. Ainsi :

$$\sum_{-n}^{n} e^{ik\theta} = e^{-in\theta}\,\frac{1-e^{i(2n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{-in\theta}\,\frac{e^{i\frac{2n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\,\frac{e^{-i\frac{2n+1}{2}\theta}-e^{i\frac{2n+1}{2}\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=-n}^{n} 1 = 2n+1$.

1.2 Quelques propriétés des éléments de $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

1.2.1 La fonction f étant continue sur le segment $[0,2\pi]$, donc elle est bornée sur ce segment :

$$\exists M > 0 / \forall x \in [0,2\pi], \quad |f(x)| \leq M.$$

Si $y \in \mathbb{R}$, il existe $x \in [0,2\pi]$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $y = x+2n\pi$ et donc $|f(y)| = |f(x+2n\pi)| = |f(x)| \leq M$. Ainsi f est bornée sur $\mathbb{R}$.

1.2.2 Par CHASLES, on a :

$$\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} g(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha-\pi}^{-\pi} g(t)\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{\alpha+\pi} g(t)\mathrm{d}t.$$

D'autre part,

$$\int_{\alpha-\pi}^{-\pi} g(t)\mathrm{d}t \overset{t=u-2\pi}{=} \int_{\alpha+\pi}^{\pi} g(u-2\pi)\mathrm{d}u = -\int_{\pi}^{\alpha+\pi} g(u)\mathrm{d}u.$$

D'où :

$$\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{d}t. \tag{4}$$

1.3 Lemme de LEBESGUE

Montrons le résultat général suivant : *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Alors*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\mathrm{d}t = 0.$$

La propriété est claire si $f = 1$, puisque :

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda t}\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{e^{i\lambda b}-e^{i\lambda a}}{i\lambda}\right| \leq \frac{2}{|\lambda|}$$

Donc, par linéarité et la relation de CHASLES, la propriété est vraie pour toutes les fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Soit maintenant $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ en escalier sur $[a, b]$ tel que
$$\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon.$$
On a alors, pour tout réel $\lambda > 0$:
$$\left|\int_a^b (f - \varphi)(t)e^{i\lambda t}\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t) - \varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leq (b-a)\varepsilon,$$
d'autre part, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\forall \lambda \geq \lambda_0$ on a :
$$\left|\int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}\right| \leq \varepsilon.$$
On obtient ainsi, $\forall \lambda \geq \lambda_0$,
$$\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_a^b (f(t) - \varphi(t))e^{i\lambda t}\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}dt\right| \leq (1 + (b-a))\varepsilon$$
ce qui preuve que
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\mathrm{d}t = 0.$$
De même on a $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t = 0$. Donc si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, alors
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos \lambda t\mathrm{d}t = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\sin \lambda t\mathrm{d}t = 0.$$
En particulier, $\lim\limits_{n \to \infty} J_n(h) = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b h(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = 0.$

1.1 Noyau de DIRICHLET

1.1.1 $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $-\theta \in \mathbb{R}$ et $D_n(-\theta) = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ik(-\theta)} = \sum\limits_{l=n}^{-n} e^{il\theta} = D_n(\theta)$. Donc D_n est 2π-périodique.

1.1.2 Par linéarité de l'intégrale, on a :
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi. \tag{3}$$