

Devoir Maison

Intégration I (Segment)
Intégration I (QIq)

Spécial Confinement

Intégrales de Wallis et intégrale de Gauss

On appelle intégrale de Gauss la limite $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt$ qu'on notera encore $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Le but de ce problème est de justifier l'existence et de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss.

I. Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.
2. Calculer W_0 et W_1 .
3. Montrer que la suite (W_n) est décroissante en déduire qu'elle converge.
4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \neq 0$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2} \right) W_n.$$

6. Montrer que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et calculer la valeur de cette constante.
7. En utilisant la monotonie de la suite (W_n) , prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

En déduire que $W_n \underset{n}{\sim} W_{n+1}$.

8. Déduire des questions précédentes que $W_n \underset{n}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$.
9. Montrer que pour tout $p \geq 0$, on a :

$$\begin{cases} W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}, \\ W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases}$$

II. Intégrale de Gauss

On pose $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que F est strictement croissante.
2. Pour $x \in [1, +\infty[$, montrer que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.
3. En déduire que F est majorée puis que F admet une limite en $+\infty$.

Dans toute la suite, on notera $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ cette limite.

4. Montrer que : $\forall u \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+u) \leq u$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$.

(b) En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{n} \cos u$, montrer que :

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

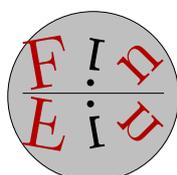
(b) En posant le changement de variable $t = \sqrt{n} \tan u$, montrer que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^B \cos^{2p}(t) dt$ où $B \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $p \in \mathbb{N}$ sont à déterminer.

(c) Montrer que $\int_0^B \cos^{2p}(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}-B}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t) dt$.

(d) Déduire des questions précédentes que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

7. Déterminer alors la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.



Correction du devoir maison

Intégrale de Wallis et intégrale de Gauss

I. Intégrales de Wallis

1. On effectue le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - u$ d'où $dx = -du$. On obtient alors :

$$W_n = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - u \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u) dx$$

2. $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \left[-\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1} t - \sin^n t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t (\sin t - 1) dt \leq 0$$

puisque pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin t \leq 1$, donc $\sin^n t (1 - \sin t) \geq 0$. La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin t$, donc $0 \leq \sin^n t$. Par positivité de l'intégrale, on a $W_n \geq 0$. La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle converge par le théorème de la limite monotone.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par l'absurde, supposons que $W_n = 0$. Comme la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est continue et positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ ce qui est absurde (elle vaut 1 en $\frac{\pi}{2}$). Ainsi, $W_n \neq 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties, les fonctions $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin^{n+1} t$ étant de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \times \sin^{n+1} t = \left[\cos t \sin^{n+1} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (n+1) (-\cos t \sin^n t) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t dt = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t (1 - \sin^2 t) dt \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ puis que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, Notons $J_n = (n+1)W_n W_{n+1}$. On a

$$J_{n+1} - J_n = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} - (n+1)W_n W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n - (n+1)W_n W_{n+1} = 0$$

donc $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, de valeur $W_0 = W_0 W_1 = \frac{\pi}{2}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$ (car la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante). Comme $W_n > 0$ (d'après les questions 2 et 3), on en déduit que :

$$\frac{n+2}{n+1} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

avec la question 4.

Le théorème de convergence par encadrement nous donne alors $\frac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $W_n \sim_n W_{n+1}$.

8. On sait $W_{n+1} \underset{n}{\sim} W_n$ donc $J_n \underset{n}{\sim} nW_n^2$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $nW_n^2 \underset{n}{\sim} \frac{\pi}{2}$.

Finalement, on en déduit que $W_n \underset{n}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$.

9. De la relation de récurrence de la question 4, on obtient, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{(2p)(2p-2)} I_{2p-4} \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5)}{(2p)(2p-2)(2p-4)} I_{2p-6} = \dots = \frac{(2p-1) \times (2p-3) \times \dots \times 1}{(2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2} W_0. \\ &= \frac{[(2p-1) \times (2p-3) \times \dots \times 1] \times [(2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2]}{[(2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2]^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{(2p)(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)} I_{2p-3} \\ &= \frac{(2p)(2p-2)(2p-4)}{(2p+1)(2p-1)(2p-3)} I_{2p-5} = \dots = \frac{(2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2}{(2p+1) \times (2p-1) \times \dots \times 3} W_1 \\ &= \frac{[(2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2]^2}{[(2p+1) \times (2p-1) \times \dots \times 3] \times [(2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2]} \\ &= \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

II. Intégrale de Gauss

1. La fonction F est une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ (continue sur \mathbb{R}), elle est donc dérivable, et pour $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = e^{-x^2} > 0$. F est donc strictement croissante.

2. Pour $x \in [1, +\infty[$, on a $1 \leq x$, donc en multipliant par $x > 0$, $x \leq x^2$ et $-x^2 \leq -x$. En appliquant \exp , croissante sur \mathbb{R} , on en déduit que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

3. Soit $x \in [1, +\infty[$. Par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt = F(1) + \int_1^x e^{-t^2} dt \leq F(1) + \int_1^x e^{-t} dt \\ &= F(1) + \left[-e^{-t} \right]_1^x = F(1) + e - e^{-x} \leq F(1) + e \end{aligned}$$

puisque, par la question précédente, pour tout $t \in [1, x]$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$, donc par croissance de l'intégrale, $\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt$.

Par suite, F est croissante et majorée (par $F(1) + e$). Elle admet donc une limite en $+\infty$.

4. Soit $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto u - \ln(1+u)$. f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ (comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont), et pour $u \in]-1, +\infty[$, $f'(u) = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u}$ est de même signe que u . f est donc décroissante sur $] -1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$, donc admet un minimum en 0.

On a $f(0) = 0$, donc pour tout $u \in]-1, +\infty[$, $f(u) \geq f(0) = 0$, ce qui montre que $\ln(1+u) \leq u$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Pour $t \in [0, \sqrt{n}]$, la question précédente donne (puisque $-\frac{t^2}{n} \in]-1, 0[$) $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n}$. Comme $n > 0$, on en déduit que $n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -t^2$ et comme exp est croissante,

$$\exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) \leq e^{-t^2} \text{ i.e. } \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}.$$

Cette dernière inégalité reste vraie lorsque $t = \sqrt{n}$, donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx.$$

- (b) Le changement de variable $t = \sqrt{n} \cos u$ équivaut à $u = \arccos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$. Il donne $dt = -\sqrt{n} \sin u du$ et les bornes deviennent $\frac{\pi}{2}$ et 0 :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 u)^n (-\sqrt{n} \sin u) du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 u)^n \sin u du \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u du = \sqrt{n} W_{2n+1}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Pour $t \in \mathbb{R}$, $\frac{t^2}{n} \in \mathbb{R}_+$, et par la question 1, $\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$. Comme $-n < 0$, on en déduit que $-n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \geq -t^2$. Comme exp est croissante on en déduit que :

$$e^{-t^2} \leq \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)\right) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

- (b) On pose le changement de variable $t = \sqrt{n} \tan u$ dans l'intégrale proposée, qui équivaut à $u = \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$. Ceci transforme dt en $\sqrt{n}(1 + \tan^2 u) du$ et les bornes en 0 et $B = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 u)^{-n} \sqrt{n}(1 + \tan^2 u) du \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^{n-1} du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2p} u du \end{aligned}$$

avec $p = n - 1$.

- (c) On pose le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ pour trouver :

$$\int_0^B \cos^{2p} t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-B} \cos^{2p}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) (-du) = \int_{\frac{\pi}{2}-B}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} u du.$$

- (d) D'après la question (b) et par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} t dt = \sqrt{n} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} u du \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$$

puisque $\sin^{2n-2} u \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

7. D'après les questions 6. et 7., on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$$

Or, d'après A.8, on a $\sqrt{n}W_{2n+1} \underset{n}{\sim} \sqrt{n}W_{2n} \underset{n}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ d'où $\sqrt{n}W_{2n+1} \underset{n}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}W_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De même, $\sqrt{n}W_{2n-2} \underset{n}{\sim} \sqrt{n}W_{2n} \frac{\pi}{4} \underset{n}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}W_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

À RETENIR. Valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

