Devoir à la maison n°01 : corrigé

Solution 1.

1. **a.** On trouve $f_1 : x \mapsto \frac{x}{2}$, $f_2 : x \mapsto -\frac{1}{8}x^2 + x$ et $f_3 : x \mapsto -\frac{1}{128}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$.

   b. f_1 est clairement strictement croissante sur $[0,1]$.
   f_2 est polynomiale donc dérivable sur $[0,1]$ et

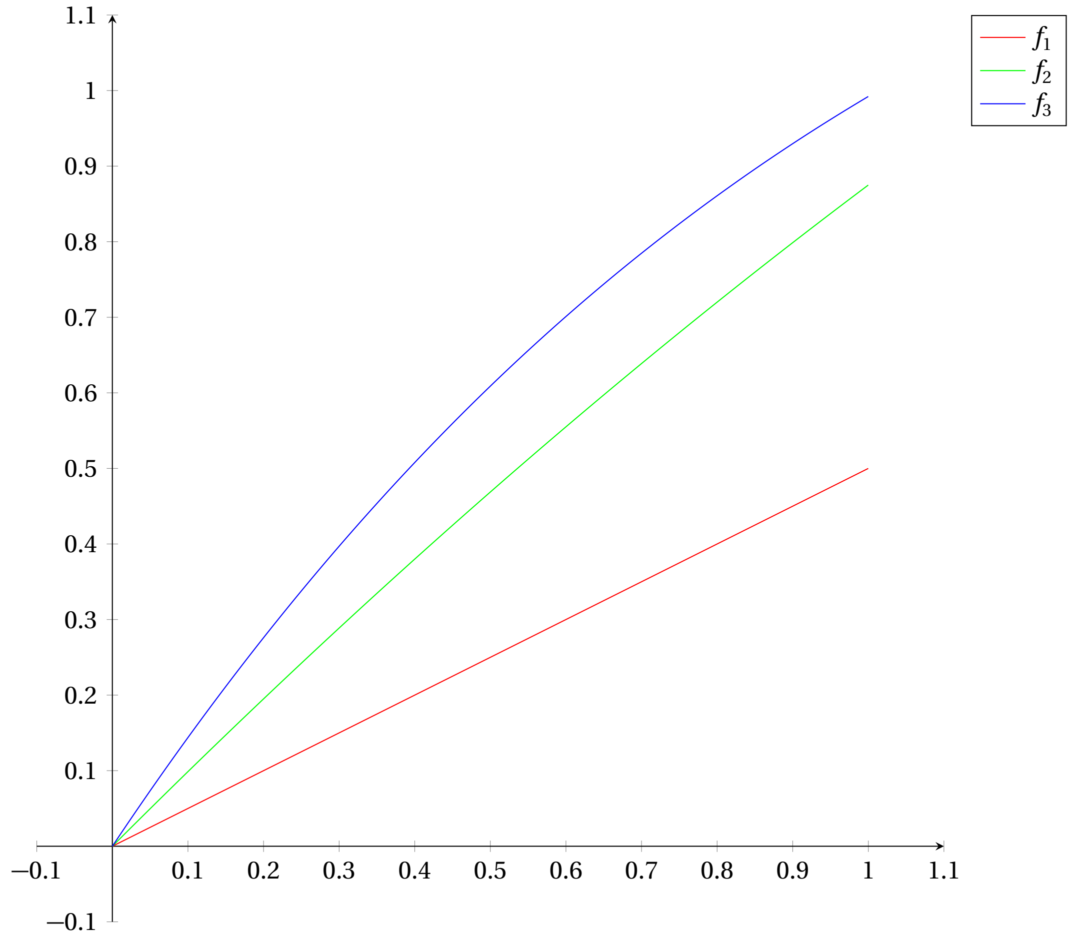
$$\forall x \in [0,1],\ f_2'(x) = 1 - \frac{1}{4}x > 0$$

   donc f_2 est strictement croissante sur $[0,1]$.
   f_3 est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_3'(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$$
$$f_3''(x) = -\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

   Le trinôme $-\frac{3}{32}X^2 + \frac{3}{4}X - \frac{5}{4}$ admet pour racines $4 - \frac{2\sqrt{6}}{3}$ et $4 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Puisque $4 - \frac{2\sqrt{6}}{3} > 1$, f_3'' est strictement négative sur $[0,1]$. Ainsi f_3' est strictement décroissante sur $[0,1]$. Puisque $f_3'(1) = 1/2 > 0$, f_3' est strictement positive sur $[0,1]$, de sorte que f_3 est strictement croissante sur $[0,1]$.

   c. En regardant la suite des questions, on devine les positions respectives des courbes de f_1, f_2 et f_3.



2. **a.** On raisonne par récurrence. Tout d'abord, $0 \leqslant u_0 = 0 \leqslant \sqrt{x}$.
   Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{x}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(x - u_n^2) \geqslant u_n \geqslant 0 \qquad \text{car } u_n^2 \leqslant x$$

et

$$\sqrt{x}-u_{n+1}=\sqrt{x}-u_n-\frac{1}{2}(x-u_n^2)=\left(\sqrt{x}-u_n\right)\left(1-\frac{1}{2}(\sqrt{x}+u_n)\right)$$

Or, d'une part, $\sqrt{x}-u_n\geqslant 0$ et, d'autre part, $\sqrt{x}\leqslant 1$ et $u_n\leqslant\sqrt{x}\leqslant 1$ donc $1-\frac{1}{2}(\sqrt{x}+u_n)\geqslant 0$. On obtient bien $\sqrt{x}-u_{n+1}\geqslant 0$.
Finalement, on a montré que $0\leqslant u_n\leqslant\sqrt{x}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(x-u_n^2\right)\geqslant 0$$

car $0\leqslant u_n\leqslant\sqrt{x}$. Ainsi (u_n) est bien croissante.

c. D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée. Notons ℓ sa limite. La relation de récurrence vérifiée par (u_n) implique que $\ell=\ell+\frac{1}{2}(x-\ell^2)$ et donc que $\ell^2=x$. Or (u_n) est positive d'après la question précédente donc $\ell\geqslant 0$ puis $\ell=\sqrt{x}$.

3. **a.** Soit $(n,x)\in\mathbb{N}\times[0,1]$. On a déjà remarqué que

$$0\leqslant\sqrt{x}-f_{n+1}(x)=\left(\sqrt{x}-f_n(x)\right)\left(1-\frac{1}{2}(\sqrt{x}+f_n(x))\right)$$

Or on sait également que $0\leqslant f_n(x)\leqslant\sqrt{x}$ donc $\sqrt{x}-f_n(x)\geqslant 0$ et $1-\frac{1}{2}(\sqrt{x}+f_n(x))\leqslant 1-\frac{\sqrt{x}}{2}$. Finalement,

$$0\leqslant\sqrt{x}-f_{n+1}(x)\leqslant\left(\sqrt{x}-f_n(x)\right)\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

On montre alors par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$0\leqslant\sqrt{x}-f_n(x)\leqslant\sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

b. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. φ_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $t\in[0,1]$,

$$\varphi_n'(t)=\left(1-\frac{t}{2}\right)^n-\frac{nt}{2}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{n-1}=\left(1-\frac{t}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{n+1}{2}t\right)$$

On en déduit que φ_n est croissante sur $\left[0,\frac{2}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{n+1},1\right]$.
Notamment, φ_n admet un maximum et celui-ci vaut

$$\varphi_n\left(\frac{2}{n+1}\right)=\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n$$

c. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a montré précédemment que pour tout $x\in[0,1]$,

$$0\leqslant\sqrt{x}-f_n(x)\leqslant\varphi_n(\sqrt{x})\leqslant\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n$$

Or pour $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant 1-\frac{2}{n+1}\leqslant 1$ donc

$$0\leqslant\sqrt{x}-f_n(x)\leqslant\frac{2}{n+1}$$

Ceci étant valable pour tout $x\in[0,1]$, $0\leqslant \mathrm{M}_n\leqslant\frac{2}{n+1}$.
Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que (M_n) converge vers 0.

Solution 2.

On sait que $\mathrm{S}_n=\frac{n(n+1)}{2}$. On raisonne alors par récurrence.
Il est clair que $\mathrm{T}_1=\mathrm{S}_1^2=1$.
Supposons que $\mathrm{T}_n=\mathrm{S}_n^2$ pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{n+1}^2&=(\mathrm{S}_n+(n+1))^2\\
&=\mathrm{S}_n^2+2(n+1)\mathrm{S}_n+(n+1)^2\\
&=\mathrm{T}_n+2(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)^2\\
&=\mathrm{T}_n+n(n+1)^2+(n+1)^2\\
&=\mathrm{T}_n+(n+1)^3=\mathrm{T}_{n+1}
\end{aligned}$$