DEVOIR À LA MAISON N°01

EXERCICE 1.

On considère une suite de *fonctions* (f_n) définies sur $[0,1]$ de la manière suivante.

- $\forall x \in [0,1]$, $f_0(x)=0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $f_{n+1}(x)=f_n(x)+\dfrac{1}{2}(x-f_n(x)^2)$.

1. **a.** Déterminer les fonctions f_1, f_2 et f_3.

b. Etudier les variations de f_1, f_2 et f_3 sur $[0,1]$.

c. Tracer les courbes des fonctions f_1, f_2 et f_3.

2. On fixe $x \in [0,1]$ et on pose $u_n = f_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{x}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

3. **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant \sqrt{x}-f_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

b. Etudier les variations de la fonction $\varphi_n : t \in [0,1] \mapsto t\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c. On note M_n le maximum de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}-f_n(x)$ sur $[0,1]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \mathrm{M}_n \leqslant \dfrac{2}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite (M_n).

EXERCICE 2.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} k \qquad\qquad \mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Montrer que $\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_n^2$.