Fonctions Usuelles

Devoir Maison N°3

Exercice 1

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

a) $f(x) = \mathrm{th}(x) - \frac{1}{3}\mathrm{th}^3(x)$ b) $f(x) = \arcsin(\mathrm{th}(x))$

c) $f(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x))$ d) $f(x) = \arctan(\mathrm{th}(x))$

e) $f(x) = \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ f) $f(x) = \sqrt{\frac{1-\arcsin(x)}{1+\arcsin(x))}}$

g) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ h) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}\right)$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Q1) Simplifier la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{a+kb}$.

Q2) En déduire une simplification de $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(a+kb)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(a+kb)$.

Q3) Simplifier les sommes $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{ch}(a+kb)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{sh}(a+kb)$.

Exercice 3

Q1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{A} = \arctan(x) + \arctan(y)$.

a) Montrer que $\mathrm{A} = \pm\frac{\pi}{2} \iff xy = 1$.

b) On suppose $xy \neq 1$, simplifier $\tan(\mathrm{A})$ (justifier l'existence) et en déduire **soigneusement** une simplification de $\arctan(x) + \arctan(y)$.

Q2) Soit $p \in \mathbb{N}$, simplifier $\arctan(p+1) - \arctan(p)$.

Q3) En déduire la limite de la suite (S_n) définie par $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.

Problème

Dans cet exercice, on va démontrer l'égalité ci-dessous de trois façons différentes.

$$\forall x \in [0,1], \quad \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1) \tag{1}$$

1. **À l'aide de la dérivation.**
   Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \arcsin(\sqrt{x}) - \dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $]0,1[$.
   (b) Pour $x \in]0,1[$, calculer $f'(x)$.
   (c) En déduire la formule (1), pour tout $x \in]0,1[$.
   (d) Montrer l'égalité pour $x = 0$ et $x = 1$.
2. **À l'aide de la fonction sinus.**
   (a) Montrer que, $\forall x \in [0,1]$, $2\arcsin(\sqrt{x}) - \dfrac{\pi}{2} \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.
   (b) Pour $x \in [0,1]$, simplifier l'expression $\sin\left(2\arcsin(\sqrt{x}) - \dfrac{\pi}{2}\right)$.
   (c) En déduire la formule (1).
3. **À l'aide d'un changement de variable.**
   (a) Déterminer un intervalle I sur lequel la fonction $x \mapsto \sin^2 x$ soit une bijection de I dans $[0,1]$.
   (b) En posant $x = \sin^2 t$, pour $t \in I$, calculer $\arcsin(\sqrt{x})$ et $\dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)$ en fonction de t.
   (c) En déduire la formule (1).

Fin