# Nombres Réels

## Devoir Vacances N°4 Bis

## Variations sur la fonction « Partie Entière »

### Rappels et notations

Les définitions, notations et propriétés ci-dessous sont rappelées à toutes fins utiles, et aucune démonstration n'est demandée. Dans ces notations, $x$ est un réel quelconque. Sauf indication contraire, tous les entiers considérés dans ce problème sont des entiers *relatifs*.

- On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x$ (ou encore l'entier "plancher" de $x$).
  C'est le plus grand entier inférieur ou égal à $x$.
  Il est donc caractérisé par $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, c'est-à-dire par $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.
- On note $\lceil x \rceil$ l'entier "plafond" de $x$.
  C'est le plus petit entier supérieur ou égal à $x$.
  Il est donc caractérisé par $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$, c'est-à-dire par $x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1$.
- Il est clair que les applications $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et $x \mapsto \lceil x \rceil$ sont croissantes au sens large.
- Pour tout entier $p$, on a $\begin{cases} \lfloor x \rfloor = p \Leftrightarrow x \in \ [p, p+1[ \\ \lceil x \rceil = p \Leftrightarrow x \in \ ]p-1, p] \end{cases}$ et $\begin{cases} \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p \\ \lceil x + p \rceil = \lceil x \rceil + p \end{cases}$

### Énoncé du problème

1. Pour tout réel $x$, vérifier que $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ et que $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.
2. Soit $x$ un réel et $p$ un entier. Montrer les équivalences suivantes :
   $$\begin{cases} x \leqslant p \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leqslant p \\ x < p \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + 1 \leqslant p \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p \leqslant x \Leftrightarrow p \leqslant \lfloor x \rfloor \\ p < x \Leftrightarrow p \leqslant \lceil x \rceil - 1 \end{cases}$$
3. On note $\mathrm{N}(I)$ le nombre d'entiers distincts appartenant à un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.
   Soit $x$ et $y$ des réels, avec $x < y$. Calculer $\mathrm{N}(I)$ dans les cas suivants :
   $I = ]x, y[, \quad I = [x, y[, \quad I = ]x, y], \quad I = [x, y].$
   On exprimera les réponses en fonction d'un ou plusieurs des entiers $\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor, \lceil x \rceil, \lceil y \rceil$.
4. (a) Soit $x$ un réel, et $k, n$ deux entiers ($n > 0$). Prouver que $\left\lfloor \dfrac{x+k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor + k}{n} \right\rfloor$.
   (b) Montrer que $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application continue et croissante (au sens large) sur $\mathbb{R}$, et telle qu'on ait toujours l'implication $f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que pour tout réel $x$, on a $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$
   (b) Montrer que pour tout réel $x$, on a $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$.
   On appréciera une démonstration qui ne serait trop proche de celle de 5.a...
   (c) Retrouver ainsi les résultats des questions 4a et 4b.
6. Soit $n$ un entier strictement positif.
   On se propose de calculer les sommes $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left\lceil \sqrt{k} \right\rceil$ et $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.
   (a) On suppose tout d'abord qu'il existe $m$ dans $\mathbb{N}^*$ tel que $n = m^2$.
   En utilisant une partition de $[1, \ldots, n]$, montrer que $S_n = \dfrac{(m+1)(4m^2 - m)}{6}$.

(b) Montrer que dans le cas général, $S_n = \dfrac{(m+1)(6n-2m^2-m)}{6}$, avec $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

(c) Avec ces notations, en déduire que $T_n = \dfrac{m(6n+5-2m^2-3m)}{6}$

7. Dans cette question, $x$ est un réel, $m$ est dans $\mathbb{Z}$ et $n$ est dans $\mathbb{N}^*$.

On se propose de calculer la somme $U(m,n,x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \dfrac{x+km}{n} \right\rfloor$.

(a) On commence par supposer $m = 1$. Montrer que $U(1,n,x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \dfrac{x+k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Indication : commencer par examiner le cas où $x$ est dans $\mathbb{Z}$, puis généraliser.

(b) On suppose maintenant que les entiers $m$ et $n$ sont premiers entre eux (c'est-à-dire qu'ils n'ont pas d'autre diviseur positif autre que 1.)

Pour tout $k$ de $\{0,\dots,n-1\}$ on note $f(k)$ le reste dans la division de $km$ par $n$.

i. Montrer que $\left\lfloor \dfrac{x+km}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{x+f(k)}{n} \right\rfloor + \dfrac{km}{n} - \dfrac{f(k)}{n}$.

ii. Montrer que $f$ est une bijection de $\{0,\dots,n-1\}$ sur lui-même.

iii. En déduire que $U(m,n,x) = \lfloor x \rfloor + \dfrac{(m-1)(n-1)}{2}$

(c) On suppose enfin que les entiers $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sont quelconques.

On note $d$ le pgcd de $m$ er de $n$ (leur plus grand diviseur commun.)

Il existe donc deux entiers $m' \in \mathbb{Z}$ et $n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\begin{cases} m = dm' \\ n = dn' \end{cases}$.

On sait enfin que $m'$ et $n'$ sont premiers entre eux.

i. En notant $k = n'q + k'$ la division de $k$ par $n'$, montrer que :

$$U(m,n,x) = \sum_{q=0}^{d-1} \sum_{k'=0}^{n'-1} \left\lfloor \frac{x+(n'q+k')m}{n} \right\rfloor = \sum_{q=0}^{d-1} \left( qm'n' + \sum_{k'=0}^{n'-1} \left\lfloor \frac{x+k'm}{n} \right\rfloor \right)$$

ii. En déduire $U(m,n,x) = m'n'\,\dfrac{d(d-1)}{2} + d\,U\!\left(m', n', \dfrac{x}{d}\right)$.

iii. Conclure finalement, avec $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $d = \operatorname{pgcd}(m,n)$ :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+km}{n} \right\rfloor = d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{mn-m-n+d}{2}.$$

**Remarque**

Par symétrie, le résultat précédent prouve que pour tout réel $x$ et pour tous entiers $m,n$ strictement positifs, on a l'égalité : $\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \dfrac{x+km}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor \dfrac{x+kn}{m} \right\rfloor$.

## Corrigé

1. – Soit $x$ un réel, l'entier $p = \lceil x \rceil$ est caractérisé par $x \leqslant p < x+1$.

   Mais avec $y = -x$ cet encadrement équivaut à $y - 1 < -p \leqslant y$.

   On reconnait en $-p$ la caractérisation de l'entier $\lfloor y \rfloor$. Ainsi $\lfloor -x \rfloor = -p = -\lceil x \rceil$.

   – De même manière, $q = \lfloor x \rfloor$ est caractérisé par $x - 1 < q \leqslant x$.

   Cet encadrement équivaut à $-x \leqslant -q < -x + 1$.

   On reconnait en $-q$ la caractérisation de $\lceil -x \rceil$. Ainsi $\lceil -x \rceil = -q = -\lfloor x \rfloor$.

2. Soit $x$ un réel et $p$ un entier.

   – Par définition, $\lceil x \rceil$ est le minimum de l'ensemble des entiers $q$ tels que $x \leqslant q$.

   On a donc par définition : $x \leqslant p \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leqslant p$.

   – On sait que $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand des entiers inférieurs ou égaux à $x$.

   $\lfloor x \rfloor + 1$ est donc le plus petit des entiers strictement supérieurs à $x$.

   Ainsi l'inégalité $x < p$ est-elle équivalente à $\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant p$.

   – Par définition, $\lfloor x \rfloor$ est le maximum de l'ensemble des entiers $q$ tels que $q \leqslant x$.

   On a donc par définition : $p \leqslant x \Leftrightarrow p \leqslant \lfloor x \rfloor$.

   – On sait que $\lceil x \rceil$ est le plus petit des entiers supérieurs ou égaux à $x$.

   $\lceil x \rceil - 1$ est donc le plus grand des entiers strictement inférieurs à $x$.

   Ainsi l'inégalité $p < x$ est-elle équivalente à $p \leqslant \lceil x \rceil - 1$.

3. – Si $m, n$ sont deux entiers, avec $m \leqslant n$, alors $\mathrm{N}([m,n]) = n - m + 1$.

   – Pour tout entier $p$, on a $x < p < y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + 1 \leqslant p \leqslant \lceil y \rceil - 1$.

   Ainsi $\mathrm{N}(]x,y[) = \mathrm{N}\left([\lfloor x \rfloor + 1, \lceil y \rceil - 1]\right) = \lceil y \rceil - \lfloor x \rfloor - 1$.

   – Pour tout entier $p$, on a $x \leqslant p < y \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leqslant p \leqslant \lceil y \rceil - 1$.

   Ainsi $\mathrm{N}([x,y[) = \mathrm{N}\left([\lceil x \rceil, \lceil y \rceil - 1]\right) = \lceil y \rceil - \lceil x \rceil$.

   – Pour tout entier $p$, on a $x < p \leqslant y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + 1 \leqslant p \leqslant \lfloor y \rfloor$.

   Ainsi $\mathrm{N}(]x,y]) = \mathrm{N}\left([\lfloor x \rfloor + 1, \lfloor y \rfloor]\right) = \lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor$.

   – Pour tout entier $p$, on a $x \leqslant p \leqslant y \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leqslant p \leqslant \lfloor y \rfloor$.

   Ainsi $\mathrm{N}([x,y]) = \mathrm{N}\left([\lceil x \rceil, \lfloor y \rfloor]\right) = \lfloor y \rfloor - \lceil x \rceil + 1$.

4. (a) Notons $p = \left\lfloor \dfrac{x+k}{n} \right\rfloor$. On a $p \leqslant \dfrac{x+k}{n} < p+1$ donc $pn - k \leqslant x < (p+1)n - k$.

   Or $pn - k$ et $(p+1)n - k$ sont des entiers.

   On en déduit (cf question 2) que $pn - k \leqslant \lfloor x \rfloor < (p+1)n - k$.

   Il en découle $p \leqslant \dfrac{\lfloor x \rfloor + k}{n} < p + 1$ donc $\left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor + k}{n} \right\rfloor = p = \left\lfloor \dfrac{x+k}{n} \right\rfloor$.

(b) Supposons $x > 0$. Alors $p = \lceil \sqrt{x} \rceil$ est un entier strictement positif.

On a $p - 1 < \sqrt{x} \leqslant p$ donc $(p-1)^2 < x \leqslant p^2$.

Mais $(p-1)^2$ et $p^2$ sont des entiers.

D'après l'énoncé, il en découle $(p-1)^2 < \lceil x \rceil \leqslant p^2$ donc $p - 1 < \sqrt{\lceil x \rceil} \leqslant p$.

Cela signifie que $\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = p = \lceil \sqrt{x} \rceil$ (et c'est encore vrai si $x = 0$.)

5. (a) Soit $x$ un réel. Notons $m = \lfloor x \rfloor$

L'application $f$ étant croissante, $m \leqslant x$ implique $f(m) \leqslant f(x)$.

L'application $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ étant elle aussi croissante, on a $\lfloor f(m) \rfloor \leqslant \lfloor f(x) \rfloor$.

Par l'absurde, supposons $\lfloor f(m) \rfloor < \lfloor f(x) \rfloor$ c'est-à-dire $\lfloor f(m) \rfloor + 1 \leqslant \lfloor f(x) \rfloor$.

Notons $p = \lfloor f(x) \rfloor$. On a ainsi $f(m) < \lfloor f(m) \rfloor + 1 \leqslant p \leqslant f(x)$ donc $f(m) < p \leqslant f(x)$.

L'application $f$ étant continue, il existe $q$ dans $]m, x]$ tel que $f(q) = p$.

En utilisant les hypothèses, $q$ est un entier car $p = f(q)$ est un entier.

On ainsi trouvé un entier $q$ tel que $m < q \leqslant x$, ce qui est absurde (c'est en contradiction avec la définition de $m = \lfloor x \rfloor$.)

Conclusion, pour tout réel $x$, on a $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$.

(b) On pourrait utiliser une méthode analogue mais ça ne serait pas très élégant.

On va en fait utiliser le résultat ci-dessus, avec l'application $x \mapsto g(x) = -f(-x)$.

Cette application est continue (composée d'applications continues).

Elle est croissante car :

$$x \leqslant y \Rightarrow -y \leqslant -x \Rightarrow f(-y) \leqslant f(-x) \Rightarrow -f(-x) \leqslant -f(-y)$$

Pour tout réel $x$, on a $\lfloor g(\lfloor -x \rfloor) \rfloor = \lfloor g(-x) \rfloor$ donc $\lfloor g(-\lceil x \rceil) \rfloor = \lfloor -f(x) \rfloor$.

Autrement dit : $\lfloor -f(\lceil x \rceil) \rfloor = -\lceil f(x) \rceil$ donc $-\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = -\lceil f(x) \rceil$.

On a donc bien obtenu l'égalité : $\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$.

(c) – L'application $f : x \mapsto \dfrac{x+k}{n}$ $(k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et croissante.

D'autre part, si $f(x) = p \in \mathbb{Z}$, alors $x = np - k \in \mathbb{Z}$.

Les hypothèses du début de la question 5 sont donc réunies.

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$, c'est-à-dire $\left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor + k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{x+k}{n} \right\rfloor$.

– L'application $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Si $f(x)$ est un entier $k$, alors $x = k^2$ est un entier.

Les hypothèses sur $f$ sont donc réunies (sur $\mathbb{R}^+$ et pas sur $\mathbb{R}$, mais peu importe : on peut par exemple prolonger $f$ en posant $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^-$...)

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$, c'est-à-dire $\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$.

6. (a) Pour tout $j$ de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intervalle d'entiers $I_j = ](j-1)^2, j^2]$.

Par exemple, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2, 3, 4\}$, $I_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, etc.

Avec $n = m^2$, l'intervalle $I = [1, n]$ est la réunion disjointe $I_1 \cup I_2 \cup \cdots I_m$.

On peut donc écrire $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} S_{n,j}$ avec $S_{n,j} = \displaystyle\sum_{k \in I_j} \left\lceil \sqrt{k} \right\rceil$.

Or pour tout $k$ de $I_j$, on a $(j-1)^2 < k \leqslant j^2$ donc $j-1 < \sqrt{k} \leqslant j$ et $\left\lceil \sqrt{k} \right\rceil = j$.

D'autre part, le cardinal de l'intervalle d'entiers $I_j$ est $j^2-(j-1)^2 = 2j-1$.

Ainsi $S_n = S_{m^2} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m}(2j-1)j = \frac{m(m+1)(2m+1)}{3} - \frac{m(m+1)}{2}$.

Finalement : $S_n = S_{m^2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\lceil \sqrt{k} \right\rceil = \frac{(m+1)(4m^2-m)}{6}$.

(b) Il existe un unique entier $m$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $m^2 \leqslant n < (m+1)^2$.

Cet entier vérifie $m \leqslant \sqrt{n} < m+1$. Autrement dit $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

On peut écrire $S_n = S_{m^2} + \displaystyle\sum_{k=m^2+1}^{n}\left\lceil \sqrt{k} \right\rceil$.

La première somme, on le sait, est égale à $\dfrac{(m+1)(4m^2-m)}{6}$.

La deuxième comporte $n-m^2$ termes (éventuellement $n-m^2=0$).

Dans chacun de ces termes on a $m < \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n} < m+1$ donc $\left\lceil \sqrt{k} \right\rceil = m+1$.

La deuxième somme vaut donc $(n-m^2)(m+1)$.

Ainsi $S_n = \dfrac{(m+1)(4m^2-m)}{6} + (n-m^2)(m+1) = \dfrac{(m+1)(6n-2m^2-m)}{6}$.

(c) Il suffit de considérer la différence $S_n - T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\left\lceil \sqrt{k} \right\rceil - \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor\right)$.

Dans cette somme toutes les quantités $u_k = \left\lceil \sqrt{k} \right\rceil - \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$ valent 0 ou 1.

En fait, $u_k = 0$ si $\sqrt{k}$ est un entier, c'est-à-dire si $k$ est un carré, et $u_k = 1$ sinon.

Or dans l'intervalle $[1,n]$, il y a $m$ carrés parfaits, de 1 à $m^2$.

Ainsi $S_n - T_n = n-m$, donc $T_n = \dfrac{(m+1)(6n-2m^2-m)}{6} - n + m$.

Il en découle finalement $T_n = \dfrac{m(6n+5-2m^2-3m)}{6}$.

7. (a) – On suppose tout d'abord que $x$ est un entier relatif.

Soit $x = qn+r$ sa division euclidienne par $n$ (on a $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0,\dots,n-1\}$.)

$U(1,n,x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor \frac{qn+r+k}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-1}\left(q + \left\lfloor \frac{r+k}{n} \right\rfloor\right) = nq + \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor \frac{r+k}{n} \right\rfloor$.

Dans cette dernière somme on a : $0 \leqslant r+k \leqslant r+n-1 < 2n$.

Ainsi $\left\lfloor \dfrac{r+k}{n} \right\rfloor$ vaut 0 si $r+k<n$ et 1 si $r+k \geqslant n$.

On en déduit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor \frac{r+k}{n} \right\rfloor = \sum_{k=n-r}^{n-1} 1 = r$. Finalement : $U(1,n,x) = nq+r = x$.

– On suppose maintenant $x \in \mathbb{R}$. On sait depuis (4a) que $\left\lfloor \dfrac{x+k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor + k}{n} \right\rfloor$.

On en déduit $U(1,n,x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + k}{n} \right\rfloor$.

Mais $\lfloor x\rfloor$ est un entier, donc cette dernière somme vaut $\lfloor x\rfloor$.

On a ainsi prouvé l'égalité $U(1,n,x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+k}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$.

(b) i. On a $\dfrac{x+km}{n}=\dfrac{x+f(k)+km-f(k)}{n}=\dfrac{x+f(k)}{n}+\dfrac{km-f(k)}{n}$.

Mais $\dfrac{km-f(k)}{n}$ est un entier. On en déduit :

$$\left\lfloor\frac{x+km}{n}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{x+f(k)}{n}\right\rfloor+\frac{km-f(k)}{n}=\left\lfloor\frac{x+f(k)}{n}\right\rfloor+\frac{km}{n}-\frac{f(k)}{n}.$$

ii. $f$ est effectivement une application de $\{0,\dots,n-1\}$ dans lui-même.

Comme l'ensemble $\{0,\dots,n-1\}$ est fini, il suffit de vérifier que $f$ est injective.

On se donne donc deux entiers $k$ et $k'$ de $\{0,\dots,n-1\}$ tels que $f(k)=f(k')$.

$f(k)=f(k')$ prouve que $km-k'm=(k-k')m$ est un multiple de $n$.

Or $n$ est premier avec $m$. Le théorème de Gauss affirme donc que $n$ divise $k-k'$.

Or $k-k'$ est strictement compris entre $-n$ et $n$. La seule possibilité est $k-k'=0$.

Ainsi $f$ est injective donc bijective de $\{0,\dots,n-1\}$ dans lui-même.

iii. On sait maintenant que $U(m,n,x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left\lfloor\frac{x+f(k)}{n}\right\rfloor+\frac{km}{n}-\frac{f(k)}{n}\right)$.

Ainsi $U(m,n,x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+f(k)}{n}\right\rfloor+\frac{m}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(k)$.

Mais quand $k$ décrit $\{0,\dots,n-1\}$, $f(k)$ en fait autant.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+f(k)}{n}\right\rfloor=\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+k}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f(k)=\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$.

Finalement : $U(m,n,x)=\lfloor x\rfloor+\dfrac{m-1}{n}\,\dfrac{n(n-1)}{2}=\lfloor x\rfloor+\dfrac{(m-1)(n-1)}{2}$.

(c) i. On a $0\leqslant k<n=dn'$. Le quotient $q$ de $k$ par $n'$ varie donc de $0$ à $d-1$.

Pour un quotient $q$ donné, on a $k=qn'+k'$, avec $k'\in\{0,\dots,n'-1\}$.

En regroupant dans $U(m,n,x)$ suivant les valeurs de $q$, on obtient donc :

$$U(m,n,x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+km}{n}\right\rfloor=\sum_{q=0}^{d-1}\left(\sum_{k'=0}^{n'-1}\left\lfloor\frac{x+(qn'+k')m}{n}\right\rfloor\right).$$

Or $\dfrac{qn'm}{n}=\dfrac{qn'(dm')}{n}=\dfrac{q(dn')m'}{n}=qm'$, qui est un entier. On en déduit :

$$\sum_{k'=0}^{n'-1}\left\lfloor\frac{x+(qn'+k')m}{n}\right\rfloor=\sum_{k'=0}^{n'-1}\left(qm'+\left\lfloor\frac{x+k'm}{n}\right\rfloor\right)=qm'n'+\sum_{k'=0}^{n'-1}\left\lfloor\frac{x+k'm}{n}\right\rfloor.$$

On a effectivement obtenu : $U(m,n,x)=\displaystyle\sum_{q=0}^{d-1}\left(qm'n'+\sum_{k'=0}^{n'-1}\left\lfloor\frac{x+k'm}{n}\right\rfloor\right)$.

ii. On voit maintenant que $\displaystyle\sum_{k'=0}^{n'-1}\left\lfloor\frac{x+k'm}{n}\right\rfloor=\sum_{k'=0}^{n'-1}\left\lfloor\frac{\frac{x}{d}+k'm'}{n'}\right\rfloor=U\Big(m',n',\frac{x}{d}\Big)$.

Mais cette quantité ne dépend pas de l'indice $q$. Ainsi :

$$U(m,n,x)=\sum_{q=0}^{d-1}\Bigl(qm'n'+U\Bigl(m',n',\frac{x}{d}\Bigr)\Bigr)=m'n'\sum_{q=0}^{d-1}q+d\,U\Bigl(m',n',\frac{x}{d}\Bigr).$$

On trouve donc bien : $U(m,n,x)=m'n'\,\dfrac{d(d-1)}{2}+d\,U\Bigl(m',n',\dfrac{x}{d}\Bigr)$.

iii. En utilisant la question 7.b.iii, on obtient :

$$\begin{aligned}U(m,n,x)&=m'n'\,\frac{d(d-1)}{2}+d\left(\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor+\frac{(m'-1)(n'-1)}{2}\right)\\&=d\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor+m'n'\,\frac{d(d-1)}{2}+d\frac{(m'-1)(n'-1)}{2}\\&=d\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor+\frac{mn-m'n'd}{2}+\frac{dm'n'-n-m+d}{2}\\&=d\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor+\frac{mn-m-n+d}{2}.\end{aligned}$$

**Remarque finale**

Le résultat précédent est symétrique par rapport aux deux indices $m,n$.

Si on suppose que $m,n$ sont tous deux strictement positifs, on a donc obtenu :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+km}{n}\right\rfloor=\sum_{k=0}^{m-1}\left\lfloor\frac{x+kn}{m}\right\rfloor$$