

http://elbiliasup

Exercice 1

On considère la suite u définie par $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n - u_n^2$ et $u_0 \in [0, 1]$

1. Déterminer la monotonie de la suite u
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$
3. En déduire que la suite u est convergente et expliciter sa limite.

Exercice 2

Soit u la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$
2. Montrer que la suite u est monotone.
3. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.
4. (a) Déterminer le signe du trinôme $2x^2 - 3x + 1$
 (b) Montrer que $\forall n \geq 0, 0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(1 - u_n)$.
 (c) En déduire que $\forall n \geq 0, 0 \leq 1 - u_n \leq (\frac{2}{3})^n$.
 (d) Retrouver ainsi que la suite u est convergente.

Problème : La formule de Stirling

Le but de cet exercice est de démontrer partiellement la célèbre formule de Stirling :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

En fait, nous allons "seulement" prouver que la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$ existe et est strictement positive (ce qui est en soi est déjà un très bon résultat)

Partie I : Quelques encadrements remarquables

L'objectif de cette partie est de démontrer que

$$(E) : \forall x \geq 1, \frac{1}{12} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) \leq 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq 0$$

Pour cela, on introduit deux fonctions auxiliaires définies sur $[1, +\infty[$ par

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right)$$

1. Un encadrement auxiliaire :

- (a) Montrer que $\forall x \geq 1, \frac{1}{x+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$
- (b) En déduire un encadrement de $\left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ sur $[1, +\infty[$.
- (c) Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ existe et calculer cette limite.

2. Etude du signe de f :

- (a) Vérifier que l'on a

$$\forall x \geq 1, f'(x) = -\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) + \frac{2x+1}{2x(x+1)} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{1}{2x^2(x+1)^2}$$

- (b) Dresser le tableau des variations de f' et en déduire le signe de f' .
- (c) Dresser le tableau des variations de f et, à l'aide de la question 1.c), en déduire le signe de f .

3. Etude du signe de g :

- (a) Vérifier que l'on a :

$$\forall x \geq 1, g'(x) = f'(x) - \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2} \right) \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{1}{6x^3(x+1)^3}$$

- (b) Dresser le tableau des variations de g' et en déduire le signe de g' .
- (c) Dresser le tableau des variations de g et, à l'aide de la question 1.c), en déduire le signe de g .

Partie II : Preuve de l'existence de la limite

On introduit les trois suites suivantes :

$$\forall n \geq 1, u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}, \quad S_n = \left(\sum_{k=1}^n \ln k \right) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n, \quad T_n = S_n - \frac{1}{12n}$$

1. Vérifier que $\forall n \geq 1, \ln u_n = S_n$
2. A l'aide de l'encadrement (E) obtenue dans la première partie, montrer que les deux suites S et T sont adjacentes.
3. En déduire que la suite u converge vers un réel strictement positif.

correction de l'exercice 1

1. $u_{n+1} - u_n = -(u_n)^2 \leq 0$ donc la suite u est décroissante.

2. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [0, 1]$

Initialisation : $n = 0, u_0 \in [0, 1]$ donc (\mathcal{P}_0) est vraie.

Hérédité : Supposons (\mathcal{P}_n) vraie et montrons que (\mathcal{P}_{n+1}) est vraie, c'est-à-dire supposons que $u_n \in [0, 1]$ et montrons que $u_{n+1} \in [0, 1]$. On a

$$\left. \begin{array}{l} u_{n+1} = u_n - (u_n)^2 = u_n(1 - u_n) \text{ et puisque l'on a} \\ 0 \leq u_n \leq 1 \\ \downarrow \\ -1 \leq -u_n \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1 - u_n \leq 1 \end{array} \right\} \text{ par multiplication} \Rightarrow \underbrace{0 \leq u_n(1 - u_n) \leq 1}_{=u_{n+1}}$$

ce qui prouve la véracité de (\mathcal{P}_{n+1}) .

Conclusion : $\forall n \geq 0, (\mathcal{P}_n)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \geq 0, u_n \in [0, 1]$

3. La suite u est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente et notons L sa limite. On a

$$\left. \begin{array}{l} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \Rightarrow u_n - (u_n)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L - L^2 \\ u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \end{array} \right\} \Rightarrow L = L - L^2 \Leftrightarrow L^2 = 0 \Leftrightarrow L = 0,$$

ce qui implique que la suite u converge vers 0.

correction de l'exercice 2

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$

Initialisation : $n = 0, u_0 = \frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1]$ donc $(\mathcal{P}_0) \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Hérédité : supposons (\mathcal{P}_n) vraie et montrons (\mathcal{P}_{n+1}) , c'est-à-dire supposons que $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ et montrons que $u_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$. Pour cela, nous allons étudier le signe de

$u_{n+1} - \frac{1}{2}$ et de $u_{n+1} - 1$.

$$u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2u_n}{u_n + 1} - \frac{1}{2} = \frac{4u_n - (u_n + 1)}{2(u_n + 1)} = \frac{\overbrace{3u_n - 1}^{\geq 3 \times (1/2) - 1 = 1/2 \geq 0}}{\underbrace{2(u_n + 1)}_{\geq 2 \times 2 = 4 \geq 0}} \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq \frac{1}{2}$$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n}{u_n + 1} - 1 = \frac{2u_n - (u_n + 1)}{2(u_n + 1)} = \frac{\overbrace{u_n - 1}^{\leq 1 - 1 = 0}}{\underbrace{2(u_n + 1)}_{\geq 2 \times 2 = 4 \geq 0}} \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} \leq 1$$

Par conséquent, la propriété (\mathcal{P}_{n+1}) est vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 0, (\mathcal{P}_n)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \geq 0, u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$

2. Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n}{u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - u_n(u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{2u_n - (u_n)^2 - u_n}{u_n + 1} \\ &= \frac{u_n - (u_n)^2}{u_n + 1} = \frac{\overbrace{u_n}^{\geq 0} \overbrace{(1 - u_n)}^{\geq 0}}{\underbrace{u_n + 1}_{\geq 0}} \geq 0 \end{aligned}$$

donc la suite u est croissante.

3. La suite u est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente. Soit L sa limite, puisque $\forall n \geq 0, u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$, on en déduit que $L \in [\frac{1}{2}, 1]$ et l'on a

$$\left. \begin{array}{l} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \Rightarrow \frac{2u_n}{u_n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2L}{L + 1} \\ u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \end{array} \right\} \Rightarrow L = \frac{2L}{L + 1}$$

\Leftrightarrow produit en croix $L^2 + L = 2L \Leftrightarrow L^2 - L = 0 \Leftrightarrow L(L - 1) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{L = 0}_{\text{impossible}} \text{ ou } L = 1$

Par conséquent, la suite u converge vers 1.

4. (a) Son discriminant vaut $9 - 8 = 1 > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles qui sont $\frac{1}{2}$ et 1. Le signe du coefficient dominant du trinôme (2 ici) étant positif, le tableau de signe du trinôme est donné par

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$		+	0	-	0	+	

(b) D'après la question 1), on a que $\forall n \geq 0, u_n \leq 1$ donc

$$u_{n+1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - u_{n+1} \geq 0.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} 1 - u_{n+1} - \frac{2}{3}(1 - u_n) &= 1 - \frac{2u_n}{u_n + 1} - \frac{2}{3}(1 - u_n) \\ &= \frac{3(u_n + 1) - 6u_n - 2(1 - u_n)(u_n + 1)}{3u_n + 1} \\ &= \frac{2u_n^2 - 3u_n + 1}{u_n + 1} \end{aligned}$$

D'après la question 4)a), $2x^2 - 3x + 1$ est négatif sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et comme pour tout entier naturel n , $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$, on en déduit que $\forall n \geq 0$, $2u_n^2 - 3u_n + 1 \leq 0$, ce qui montre que

$$\forall n \geq 0, \quad 1 - u_{n+1} - \frac{2}{3}(1 - u_n) = \frac{\overbrace{2u_n^2 - 3u_n + 1}^{\leq 0}}{\underbrace{u_n + 1}_{\geq 0}} \leq 0 \Leftrightarrow 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(1 - u_n)$$

(c) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : 0 \leq 1 - u_n \leq (\frac{2}{3})^n$.

Initialisation : $n = 0$, $1 - u_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $(\frac{2}{3})^0 = 1$. Puisqu'il est évident que $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$, on en déduit que $0 \leq 1 - u_0 \leq (\frac{2}{3})^0$, c'est-à-dire que (\mathcal{P}_0) est vraie.

Hérédité : supposons que (\mathcal{P}_n) est vraie et montrons (\mathcal{P}_{n+1}) , c'est-à-dire, supposons que $0 \leq 1 - u_n \leq (\frac{2}{3})^n$ et montrons que $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq (\frac{2}{3})^{n+1}$. Pour cela, on remarque que

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq 1 - u_n &\leq (\frac{2}{3})^n \text{ (d'après } (\mathcal{P}_n)) \\ 0 \leq 1 - u_{n+1} &\leq \frac{2}{3}(1 - u_n) \text{ (d'après 4)b)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n = (\frac{2}{3})^{n+1}$$

donc (\mathcal{P}_{n+1}) est vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 0$, (\mathcal{P}_n) est vraie, c'est-à-dire que $\forall n \geq 0$, $0 \leq 1 - u_n \leq (\frac{2}{3})^n$

(d) La suite géométrique $(\frac{2}{3})^n$ tend vers 0 (car $\frac{2}{3} \in]-1, 1[$), la suite 0 tend vers 0 et l'encadrement obtenu dans la question 4)c) nous permet d'appliquer le

théorème d'encadrement donc la suite $1 - u_n$ tend vers 0, ce qui implique que la suite u tend vers 1.

Correction du problème :

Partie I : Quelques encadrements remarquables

1. (a) On introduit les fonctions $h(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(1 + \frac{1}{x})$ et $k(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x}$ dont nous allons étudier les variations sur l'intervalle $[1, +\infty[$ (en utilisant que $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$)

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} \\ &= \frac{-x + (x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$k'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} - (-\frac{1}{x^2}) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x + (x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)}$$

On en déduit les tableaux de variations de h et de k

x	1		$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	$\frac{1}{2} - \ln 2$	\nearrow	0

x	1		$+\infty$
$k'(x)$		+	
$k(x)$	$\ln 2 - 1$	\nearrow	0

Par conséquent, les fonctions h et k sont négatives sur $[1, +\infty[$, ce qui implique

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{x+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{x}) \quad \text{et} \quad \ln(1 + \frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$$

(b) En utilisant l'encadrement de la question a) et en la multipliant par $x + \frac{1}{2}$, qui est positif si $x \geq 1$, on a

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{x + \frac{1}{2}}{x+1} \leq (x + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{x}) \leq \frac{x + \frac{1}{2}}{x}$$

(c) L'encadrement de la question 1.b) combinée aux égalités suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{2}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1,$$

nous permet d'appliquer le théorème d'encadrement, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

2. (a) En utilisant les formules suivantes,

$$(uv)' = u'v + uv', \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad \text{on a}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\left(x + \frac{1}{2}\right)' \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \left(-\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{2x + 1}{2x(x + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)' + \left(\frac{2x + 1}{2x(x + 1)}\right)' \\ &= -\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{2(2x)(x + 1) - (2x + 1)(4x + 2)}{(2x(x + 1))^2} \\ &= \frac{1}{x(x + 1)} + \frac{-4x - 4x^2 - 2}{4x^2(x + 1)^2} = \frac{4x(x + 1) - 4x - 4x^2 - 2}{4x^2(x + 1)^2} \\ &= -\frac{2}{4x^2(x + 1)^2} = -\frac{1}{2x^2(x + 1)^2} \end{aligned}$$

(b) En utilisant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{2x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on obtient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ et le tableau de variations de f' est donné par

x	1		$+\infty$
$f''(x)$		-	
$f'(x)$		\searrow	0

donc la fonction f' est positive sur $[1, +\infty[$.

(c) D'après la question 1.c), on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, ce qui nous donne le tableau de variation de f .

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$		\nearrow	0

donc la fonction f est négative sur $[1, +\infty[$

3. (a) En utilisant que $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(f(x) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)\right)' = f'(x) - \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2}\right) \\ g''(x) &= f''(x) - \frac{1}{12}\left(\frac{2}{(x+1)^3} - \frac{2}{x^3}\right) = -\frac{1}{2x^2(x+1)^2} - \frac{1}{6(x+1)^3} + \frac{1}{6x^3} \\ &= \frac{-3x(x+1) - x^3 + (x+1)^3}{6x^3(x+1)^3} \\ &= \frac{-3x^2 - 3x - x^3 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)}{6x^3(x+1)^3} = \frac{1}{6x^3(x+1)^3} \end{aligned}$$

(b) En utilisant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ (d'après la question 2.b)), et le tableau de variations de g' est donné par

x	1		$+\infty$
$g''(x)$		+	
$g'(x)$		\nearrow	0

donc la fonction g' est négative sur $[1, +\infty[$.

(c) D'après la question 1.c), on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, ce qui nous donne le tableau de variation de g

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$		\searrow	0

donc la fonction g est positive sur $[1, +\infty[$

Partie II : Preuve de l'existence de la limite

1. Puisque $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$, on a

$$\ln(n!) = \ln n + \ln(n-1) + \dots + \ln(2) + \ln(1) = \sum_{k=1}^n \ln k \text{ et donc}$$

$$\begin{aligned} \ln u_n &= \ln \left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} \right) = \ln n! - \ln \left(\frac{n}{e}\right)^n - \ln \underbrace{\sqrt{n}}_{=n^{1/2}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \ln k \right) - n \ln \left(\frac{n}{e}\right) - \frac{1}{2} \ln n = \left(\sum_{k=1}^n \ln k \right) - n(\ln n - \underbrace{\ln e}_{=1}) - \frac{1}{2} \ln n \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \ln k \right) - n \ln n + n - \frac{1}{2} \ln n = \left(\sum_{k=1}^n \ln k \right) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n = S_n \end{aligned}$$

2. Etudions la monotonie des suites S et T

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \ln k \right) - \left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) + (n+1) \\ &\quad - \left[\left(\sum_{k=1}^n \ln k \right) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n \right] \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \ln k \right) + \ln(n+1) - \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln(n+1) + n + 1 \\ &\quad - \left(\sum_{k=1}^n \ln k \right) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n \\ &= 1 - \left(n + \frac{3}{2} - 1\right) \ln(n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) [\ln(n+1) - \ln n] = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)}_{\substack{\geq 1 \\ \leq 0}} \text{ (d'après la question I.2.c)} \end{aligned}$$

donc la suite S est décroissante.

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= S_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)} - \left(S_n - \frac{1}{12n}\right) = S_{n+1} - S_n - \frac{1}{12(n+1)} + \frac{1}{12n} \\ &= f(n) - \frac{1}{12(n+1)} + \frac{1}{12n} = \underbrace{g\left(\frac{1}{n}\right)}_{\substack{\geq 1 \\ \geq 0}} \text{ (d'après la question I.3.c)} \end{aligned}$$

donc la suite T est croissante. Pour finir, $T_n - S_n = -\frac{1}{12n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc les suites S et T sont adjacentes.

3. Les suites S et T sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite L . En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^L > 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = e^L > 0$$

Pour la petite histoire, on montre que $e^L = \sqrt{2\pi}$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

Ô joie, nous le montrerons lors d'un prochain devoir à la maison