Fonctions Réelles

Devoir Maison N°6

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Exercice 1

On considère la suite u définie par $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 \quad$ et $\quad u_0 \in [0, 1]$

1. Déterminer la monotonie de la suite u
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 1]$
3. En déduire que la suite u est convergente et expliciter sa limite.

Exercice 2

Soit u la suite définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$
2. Montrer que la suite u est monotone.
3. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.
4. (a) Déterminer le signe du trinôme $2x^2 - 3x + 1$
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}(1 - u_n)$.
   (c) En déduire que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant (\frac{2}{3})^n$.
   (d) Retrouver ainsi que la suite u est convergente.

Problème : La formule de Stirling

Le but de cet exercice est de démontrer partiellement la célèbre formule de Stirling :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

En fait, nous allons "seulement" prouver que la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{n}}$ existe et est strictement positive (ce qui est en soi est déjà un très bon résultat)

Partie I : Quelques encadrements remarquables

L'objectif de cette partie est de démontrer que

$$(E) : \forall x \geqslant 1, \quad \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \leqslant 1 - (x + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{x}) \leqslant 0$$

Pour cela, on introduit deux fonctions auxiliaires définies sur $[1, +\infty[$ par

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = 1 - (x + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{x}) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - \frac{1}{12}(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x})$$

1. <u>Un encadrement auxiliaire</u> :
   (a) Montrer que $\forall x \geqslant 1, \quad \dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(1 + \dfrac{1}{x}) \leqslant \dfrac{1}{x}$
   (b) En déduire un encadrement de $(x + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{x})$ sur $[1, +\infty[$.
   (c) Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{x})$ existe et calculer cette limite.
2. <u>Etude du signe de f</u> :
   (a) Vérifier que l'on a
   $$\forall x \geqslant 1, \quad f'(x) = -\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) + \frac{2x+1}{2x(x+1)} \quad \text{et} \quad f"(x) = -\frac{1}{2x^2(x+1)^2}$$
   (b) Dresser le tableau des variations de f' et en déduire le signe de f'.
   (c) Dresser le tableau des varations de f et, à l'aide de la question 1.c), en déduire le signe de f.
3. <u>Etude du signe de g</u> :
   (a) Vérifer que l'on a :
   $$\forall x \geqslant 1, \quad g'(x) = f'(x) - \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{et} \quad g"(x) = \frac{1}{6x^3(x+1)^3}$$
   (b) Dresser le tableau des variations de g' et en déduire le signe de g'.
   (c) Dresser le tableau des variations de g et, à l'aide de la question 1.c), en déduire le signe de g.

Partie II : Preuve de l'existence de la limite

On introduit les trois suites suivantes :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{n}}, \quad S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right) - (n + \frac{1}{2}) \ln n + n, \quad T_n = S_n - \frac{1}{12n}$$

1. Vérifier que $\forall n \geqslant 1, \quad \ln u_n = S_n$
2. A l'aide de l'encadrement (E) obtenue dans la première partie, montrer que les deux suites S et T sont adjacentes.
3. En déduire que la suite u converge vers un réel strictement positif.

correction de l'exercice 1

1. $u_{n+1} - u_n = -(u_n)^2 \leqslant 0$ donc la suite u est décroissante.

2. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [0,1]$
Initialisation : $n = 0$, $u_0 \in [0,1]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire supposons que $u_n \in [0,1]$ et montrons que $u_{n+1} \in [0,1]$. On a

$$u_{n+1} = u_n - (u_n)^2 = u_n(1-u_n) \text{ et puisque l'on a}$$

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \\ \Downarrow \\ -1 \leqslant -u_n \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant 1-u_n \leqslant 1 \end{array}\right\} \underset{\text{par multiplication}}{\Rightarrow} 0 \leqslant \underbrace{u_n(1-u_n)}_{=u_{n+1}} \leqslant 1$$

ce qui prouve la véracité de $(\mathcal{P}_{n+1})$.
Conclusion : $\forall n \geqslant 0$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in [0,1]$

3. La suite u est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente et notons L sa limite. On a

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\to} L \Rightarrow u_n - (u_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\to} L - L^2 \\ \qquad u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} L \end{array}\right\} \Rightarrow L = L - L^2 \Leftrightarrow L^2 = 0 \Leftrightarrow L = 0,$$

ce qui implique que la suite u converge vers 0.

correction de l'exercice 2

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [\frac{1}{2},1]$
Initialisation : $n = 0$, $u_0 = \frac{1}{2} \in [\frac{1}{2},1]$ donc $(\mathcal{P}_0) \in [\frac{1}{2},1]$.
Hérédité : supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $u_n \in [\frac{1}{2},1]$ et montrons que $u_{n+1} \in [\frac{1}{2},1]$. Pour cela, nous allons étudier le signe de $u_{n+1} - \frac{1}{2}$ et de $u_{n+1} - 1$.

$$u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2u_n}{u_n+1} - \frac{1}{2} = \frac{4u_n - (u_n+1)}{2(u_n+1)} = \frac{\overbrace{3u_n - 1}^{\geqslant 3\times(1/2)-1=1/2\geqslant 0}}{\underbrace{2(u_n+1)}_{\geqslant 2\times 2=4\geqslant 0}} \geqslant 0 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}$$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n}{u_n+1} - 1 = \frac{2u_n - (u_n+1)}{2(u_n+1)} = \frac{\overbrace{u_n - 1}^{\leqslant 1-1=0}}{\underbrace{2(u_n+1)}_{\geqslant 2\times 2=4\geqslant 0}} \leqslant 0 \Rightarrow u_{n+1} \leqslant 1$$

Par conséquent, la propriété $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
Conclusion : $\forall n \geqslant 0$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in [\frac{1}{2},1]$

2. Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n}{u_n+1} - u_n = \frac{2u_n - u_n(u_n+1)}{u_n+1} = \frac{2u_n - (u_n)^2 - u_n}{u_n+1} \\ &= \frac{u_n - (u_n)^2}{u_n+1} = \frac{\overbrace{u_n}^{\geqslant 0}\overbrace{(1-u_n)}^{\geqslant 0}}{\underbrace{u_n+1}_{\geqslant 0}} \geqslant 0 \end{aligned}$$

donc la suite u est croissante.

3. La suite u est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente. Soit L sa limite, puisque $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in [\frac{1}{2},1]$, on en déduit que $L \in [\frac{1}{2},1]$ et l'on a

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\to} L \Rightarrow \dfrac{2u_n}{u_n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{2L}{L+1} \\ \qquad u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} L \end{array}\right\} \Rightarrow L = \frac{2L}{L+1}$$

$$\underset{\text{produit en croix}}{\Leftrightarrow} L^2 + L = 2L \Leftrightarrow L^2 - L = 0 \Leftrightarrow L(L-1) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{L=0}_{\text{impossible}} \text{ ou } L = 1$$

Par conséquent, la suite u converge vers 1.

4. (a) Son discrimant vaut $9 - 8 = 1 > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles qui sont $\frac{1}{2}$ et 1. Le signe du coefficient dominant du trinôme (2 ici) étant positif, le tableau de signe du trinôme est donné par

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) D'après la question 1), on a que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant 1$ donc

$$u_{n+1} \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 - u_{n+1} \geqslant 0.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}1-u_{n+1}-\frac{2}{3}(1-u_n) &= 1-\frac{2u_n}{u_n+1}-\frac{2}{3}(1-u_n)\\ &= \frac{3(u_n+1)-6u_n-2(1-u_n)(u_n+1)}{3u_n+1}\\ &= \frac{2u_n^2-3u_n+1}{u_n+1}\end{aligned}$$

D'après la question 4)a), $2x^2-3x+1$ est négatif sur $[\frac{1}{2},1]$ et comme pour tout entier naturel n, $u_n\in[\frac{1}{2},1]$, on en déduit que $\forall n\geqslant 0,\quad 2u_n^2-3u_n+1\leqslant 0$, ce qui montre que

$$\forall n\geqslant 0,\quad 1-u_{n+1}-\frac{2}{3}(1-u_n)=\frac{\overbrace{2u_n^2-3u_n+1}^{\leqslant 0}}{\underbrace{u_n+1}_{\geqslant 0}}\leqslant 0 \Leftrightarrow 1-u_{n+1}\leqslant\frac{2}{3}(1-u_n)$$

(c) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n): 0\leqslant 1-u_n\leqslant(\frac{2}{3})^n$.

Initialisation : $n=0$, $1-u_0=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et $(\frac{2}{3})^0=1$. Puisqu'il est évident que $0\leqslant\frac{1}{2}\leqslant 1$, on en déduit que $0\leqslant 1-u_0\leqslant(\frac{2}{3})^0$, c'est-à-dire que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons que $0\leqslant 1-u_n\leqslant(\frac{2}{3})^n$ et montrons que $0\leqslant 1-u_{n+1}\leqslant(\frac{2}{3})^{n+1}$. Pour cela, on remarque que

$$\left.\begin{array}{r}0\leqslant 1-u_n\leqslant(\frac{2}{3})^n \text{ (d'après } (\mathcal{P}_n))\\ 0\leqslant 1-u_{n+1}\leqslant\frac{2}{3}(1-u_n) \text{ (d'après 4)b)}\end{array}\right\}\Rightarrow 0\leqslant 1-u_{n+1}\leqslant\frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n=(\frac{2}{3})^{n+1}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

Conclusion : $\forall n\geqslant 0$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, c'est-à-dire que $\forall n\geqslant 0,\quad 0\leqslant 1-u_n\leqslant(\frac{2}{3})^n$

(d) La suite géométrique $(\frac{2}{3})^n$ tend vers 0 (car $\frac{2}{3}\in]-1,1[$), la suite 0 tend vers 0 et l'encadrement obtenu dans la question 4)c) nous permet d'appliquer le théorème d'encadrement donc la suite $1-u_n$ tend vers 0, ce qui implique que la suite u tend vers 1.

Correction du problème :

Partie I : Quelques encadrements remarquables

1. (a) On introduit les fonctions $h(x)=\frac{1}{x+1}-\ln(1+\frac{1}{x})$ et $k(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}$ dont nous allons étudier les variations sur l'intervalle $[1,+\infty[$ (en utilisant que $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$ et $(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}$))

$$\begin{aligned}h'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x(x+1)}\\ &= \frac{-x+(x+1)}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)^2}\end{aligned}$$

$$k'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}-(-\frac{1}{x^2})=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x+(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{1}{x^2(x+1)}$$

On en déduit les tableaux de variations de h et de k

x	1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$\frac{1}{2}-\ln 2$	$\nearrow$	0

x	1		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	
$k(x)$	$\ln 2-1$	$\nearrow$	0

Par conséquent, les fonctions h et k sont négatives sur $[1,+\infty[$, ce qui implique

$$\forall x\geqslant 1,\quad \frac{1}{x+1}\leqslant\ln(1+\frac{1}{x})\quad\text{et}\quad \ln(1+\frac{1}{x})\leqslant\frac{1}{x}$$

(b) En utilisant l'encadrement de la question a) et en la multipliant par $x+\frac{1}{2}$, qui est positif si $x\geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{x+1}\leqslant\ln(1+\frac{1}{x})\leqslant\frac{1}{x}\underset{\times(x+1/2)\geqslant 0}{\Rightarrow}\frac{x+\frac{1}{2}}{x+1}\leqslant(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x})\leqslant\frac{x+\frac{1}{2}}{x}$$

(c) L'encadrement de la question 1.b) combinée aux égalités suivantes

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{2}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}1 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}1,$$

nous permet d'appliquer le théorème d'encadrement, donc

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x})=1$$

2. (a) En utilisant les formules suivantes,

$$\begin{aligned}
(uv)' &= u'v+uv',\quad (\ln u)'=\frac{u'}{u},\quad (\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2},\quad (\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2},\ \text{on a}\\
f'(x) &= -(x+\frac{1}{2})'\ln(1+\frac{1}{x})+(-(x+\frac{1}{2}))(\ln(1+\frac{1}{x}))'\\
&= -\ln(1+\frac{1}{x})-(x+\frac{1}{2})\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=-\ln(1+\frac{1}{x})+\frac{2x+1}{2x(x+1)}\\
f''(x) &= -(\ln(1+\frac{1}{x}))'+(\frac{2x+1}{2x(x+1)})'\\
&= -\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{2(2x)(x+1)-(2x+1)(4x+2)}{(2x(x+1))^2}\\
&= \frac{1}{x(x+1)}+\frac{-4x-4x^2-2}{4x^2(x+1)^2}=\frac{4x(x+1)-4x-4x^2-2}{4x^2(x+1)^2}\\
&= -\frac{2}{4x^2(x+1)^2}=-\frac{1}{2x^2(x+1)^2}
\end{aligned}$$

(b) En utilisant que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{2x(x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, on obtient que $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ et le tableau de variations de f' est donné par

x	1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	
$f'(x)$		$\searrow$	0

donc la fonction f' est positive sur $[1,+\infty[$.

(c) D'après la question 1.c), on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, ce qui nous donne le tableau de variation de f.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0

donc la fonction f est négative sur $[1,+\infty[$

3. (a) En utilisant que $(u^\alpha)'=\alpha u'u^{\alpha-1}$, on a

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (f(x)-\frac{1}{12}(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}))'=f'(x)-\frac{1}{12}(-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2})\\
g''(x) &= f''(x)-\frac{1}{12}(\frac{2}{(x+1)^3}-\frac{2}{x^3})=-\frac{1}{2x^2(x+1)^2}-\frac{1}{6(x+1)^3}+\frac{1}{6x^3}\\
&= \frac{-3x(x+1)-x^3+(x+1)^3}{6x^3(x+1)^3}\\
&= \frac{-3x^2-3x-x^3-(x^3+3x^2+3x+1)}{6x^3(x+1)^3}=\frac{1}{6x^3(x+1)^3}
\end{aligned}$$

(b) En utilisant que $\lim\limits_{x\to+\infty}g'(x)=\lim\limits_{x\to++\infty}f'(x)=0$ (d'après la question 2.b)), et le tableau de variations de g' est donné par

x	1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	
$g'(x)$		$\nearrow$	0

donc la fonction g' est négative sur $[1,+\infty[$.

(c) D'après la question 1.c), on a $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, ce qui nous donne le tableau de variation de g

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$		$\searrow$	0

donc la fonction g est positive sur $[1,+\infty[$

Partie II : Preuve de l'existence de la limite

1. Puisque $n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$, on a

$$\begin{aligned}
\ln(n!) &= \ln n + \ln(n-1)+\cdots+\ln(2)+\ln(1) = \sum_{k=1}^{n}\ln k \text{ et donc}\\
\ln u_n &= \ln\left(\frac{n!}{(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}}\right) = \ln n! - \ln(\frac{n}{e})^n - \ln\underbrace{\sqrt{n}}_{=n^{1/2}}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\ln k\right) - n\ln(\frac{n}{e}) - \frac12\ln n = \left(\sum_{k=1}^{n}\ln k\right) - n(\ln n - \underbrace{\ln e}_{=1}) - \frac12 \ln n\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\ln k\right) - n\ln n + n - \frac12\ln n = \left(\sum_{k=1}^{n}\ln k\right) - (n+\frac12)\ln n + n = S_n
\end{aligned}$$

2. Etudions la monotonie des suites S et T

$$\begin{aligned}
S_{n+1}-S_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1}\ln k\right) - (n+1+\frac12)\ln(n+1) + (n+1)\\
&\quad - \left[\left(\sum_{k=1}^{n}\ln k\right) - (n+\frac12)\ln n + n\right]\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\ln k\right) + \ln(n+1) - (n+\frac32)\ln(n+1) + n + 1\\
&\quad - \left(\sum_{k=1}^{n}\ln k\right) + (n+\frac12)\ln n - n\\
&= 1 - (n+\frac32 - 1)\ln(n+1) + (n+\frac12)\ln n\\
&= 1 - (n+\frac12)\ln(n+1) + (n+\frac12)\ln n\\
&= 1 - (n+\frac12)\left[\ln(n+1) - \ln n\right] = 1 - (n+\frac12)\ln(\frac{n+1}{n})\\
&= 1 - (n+\frac12)\ln(1+\frac1n) = \underbrace{f(\overbrace{n}^{\geqslant 1})}_{\leqslant 0} \text{ (d'après la question I.2.c))}
\end{aligned}$$

donc la suite S est décroissante.

$$\begin{aligned}
T_{n+1}-T_n &= S_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)} - \left(S_n - \frac{1}{12n}\right) = S_{n+1} - S_n - \frac{1}{12(n+1)} + \frac{1}{12n}\\
&= f(n) - \frac{1}{12(n+1)} + \frac{1}{12n} = \underbrace{g(\overbrace{n}^{\geqslant 1})}_{\geqslant 0} \text{ (d'après la question I.3.c))}
\end{aligned}$$

donc la suite T est croissante. Pour finir, $T_n - S_n = -\frac{1}{12n} \underset{\to+\infty}{\to} 0$ donc les suite S et T sont adjacentes.

3. Les suites S et T sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite L. En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = L \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\ln u_n = L \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = e^L > 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}} = e^L > 0$$

Pour la petite histoire, on montre que $e^L = \sqrt{2\pi}$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

Ô joie, nous le montrerons lors d'un prochain devoir à la maison