Développements Limités

Devoir Maison N°6

Calculatrices interdites. On rappelle :

$$\tan u = u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{2}{15}u^5 + \frac{17}{315}u^7 + o(u^8).$$

1 Cours

1. Montrer que si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$, alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_2(x)$.
2. Montrer que si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$, alors $f(x)+g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 5x$. *Etonnant non ?*

2 Quelques calculs standards

1. Donner un équivalent simple, puis la limite éventuelle de $f(x) = \dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ lorsque $x \to 0$.
2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$, on définit $g(x) = \left(x^2 + 3x + \dfrac{2}{x}\right) \mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}} \tan \dfrac{1}{x}\cdot$ Montrer que le graphe de g possède une asymptote au voisinage de $+\infty$. Préciser les positions relatives du graphe de g et de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.
3. Déterminer la limite éventuelle de $(\cos x)^{(\sin x)/x^3}$ lorsque $x \to 0$.

3 Un problème “de type terminale”

On s'intéresse ici à la suite u de premier terme $u_0 = 0$, et vérifiant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{4}\cdot$

1. Etude de f
   (a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in [0,\pi]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Etudier le signe de $f(x) - x$ sur $[0,\pi]$.
   (c) Esquisser le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$ et sur $[0,\pi]$. On représentera également sur ces dessins la droite d'équation $y = x$.
   (d) Montrer que si $x \in [0,x_0]$, alors $f(x) \in [0,x_0]$. *On dit que* $[0,x_0]$ *est stable par* f.
2. Etude de u
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,x_0]$.
   (b) Représenter les 5 premiers termes de la suite à l'aide du graphe de f (en refaire un pour l'occasion !) en montrant le procédé graphique de construction.
   (c) Montrer que u est croissante, puis que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$.
3. On note maintenant $\delta_n = x_0 - u_n$.
   (a) Montrer que $\delta_{n+1} \sim \lambda\delta_n$, avec $\lambda \in [0,1[$ une constante dont on précisera la valeur.
   (b) Montrer que $\delta_n = o\left(\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right)$ mais $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = o(\delta_n)$.

4 Un développement asymptotique

Dans ce problème, f désigne l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = x^4 + 2x^3 + x + \ln x.$$

On va s'intéresser, pour $n \in \mathbb{N}$, à l'équation $f(x) = n$. Plus précisément, à l'unique solution x_n de cette équation. On en donnera un équivalent... et un peu mieux.

1. Etudier rapidement f ; montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, et représenter son graphe.
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x > 0$ tel que $f(x) = n$.
   Dans toute la suite, x_n désignera ce réel (il dépend bien entendu de n).
3. Montrer que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (on pourra montrer que pour n assez grand, on a $x_n \geq \dfrac{n^{1/4}}{2}$).
4. Montrer que $x_n \sim n^{1/4}$.
5. On note maintenant $x_n = n^{1/4}(1 + y_n)$. Que dire de y_n ?
6. En injectant l'expression précédente dans l'équation $f(x_n) = n$, montrer : $x_n = n^{1/4} - \dfrac{1}{2} + o(1)$.
7. (plus difficile) Montrer :
$$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right).$$

Corrigé

1 Cours

1. Supposons $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$. On a alors
$$\frac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\frac{f_2(x)}{g_2(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1,$$
d'où le résultat.
2. Supposons $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$. On a alors $f(x) = 2x + o(x)$ et $g(x) = 3x + o(x)$, donc $f(x) + g(x) = 5x + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} 5x$, et hop !

2 Quelques calculs standards

1. On fait la différence de deux termes qui tendent vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers 0^+ (resp. 0^-). On a donc a priori une forme indéterminée. Comme chaque terme est équivalent à $\frac{1}{x}$, les termes principaux vont s'éliminer. On va donc récupérer un terme au delà de l'équivalent. Commençons par passer au même dénominateur :
$$\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x) - \tan x}{\ln(1+x)\tan x}.$$
Le dénominateur est équivalent à x^2. Au numérateur les termes en x vont s'éliminer, donc on fait un DL à l'ordre 2 :
$$\ln(1+x) - \tan x = x - \frac{x^2}{2} - x + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2},$$
donc $\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ est équivalent à $-\frac{1}{2}$ qui est une constante $\neq 0$, donc $\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$.
2. On cherche à écrire $g(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o(1/x)$. Plutôt que de tatonner sus les différents ordres, écrivont :
$$\begin{aligned} g(x) &= x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)(1+\cdots+o(1/x^p))\left(\frac{1}{x}+\cdots+o(1/x^q)\right) \\ &= x\left(1+\frac{3}{x}+o(1/x^2)\right)(1+\cdots+o(1/x^p))\left(1+\cdots+o(1/x^{q-1})\right) \end{aligned}$$
Pour arriver à nos fins, on va donc prendre $p = 2$ et $q = 3$: $\tan\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o(1/x^3)$, et $\mathrm{e}^{1/(x-2)} = \mathrm{e}^u = 1 + u + u^2/2 + o(u^2)$, avec $u = \frac{1}{x-2} \sim \frac{1}{x}$, si bien que $o(u^2) = o(1/x^2)$. D'une part, $u = \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x}(1-2/x)^{-1} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{x}+o(1/x)\right) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + o(1/x^2)$, et d'autre part $u^2 \sim 1/x^2$ donc $u^2 = 1/x^2 + o(1/x^2)$, donc :
$$\mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} + o(1/x^2),$$
puis :
$$\begin{aligned} g(x) &= x\left(1+\frac{3}{x}+o(1/x^2)\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{2x^2}+o(1/x^2)\right)\left(1+\frac{1}{3x^2}+o(1/x^2)\right) \\ &= x\left(1+\frac{3}{x}+o(1/x^2)\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{17}{6x^2}+o(1/x^2)\right) \\ &= x\left(1+\frac{4}{x}+\frac{35}{6x^2}+o(1/x^2)\right) = x + 4 + \frac{35}{6x} + o(1/x) \end{aligned}$$

Ainsi, $g(x)-(x+4)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$, et le graphe de g possède donc comme asymptote la droite d'équation $y=x+4$. Par ailleurs, $g(x)-(x+4)\sim\dfrac{35}{6x}$, donc est positif au voisinage de l'infini (deux choses équivalentes ont leur rapport qui tend vers 1, donc est positif pour x assez grand...). Le graphe de g est donc situé dessus son asymptote.

3.
$$(\cos x)^{(\sin x)/x^3}=\exp\left(\frac{\sin x}{x^3}\ln(\cos x)\right)=\exp\left(\frac{\sin x}{x^3}\ln\left(1-x^2/2+o(x^2)\right)\right)$$

On a $\sin x\sim x$ et $\ln\left(1-x^2/2+o(x^2)\right)\sim-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\sim-\dfrac{x^2}{2}$, donc $\dfrac{\sin x}{x^3}\ln(\cos x)\sim-\dfrac{1}{2}$, donc[1] $\dfrac{\sin x}{x^3}\ln(\cos x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}-\dfrac{1}{2}$, puis par continuité de la fonction exponentielle : $\exp(...)\underset{x\to0}{\longrightarrow}\mathrm{e}^{-1/2}$.

3 Un problème "de type terminale"

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=1-\dfrac{1}{2}\sin x$. L'encadrement $-1\leq\sin x\leq1$ donne $-\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{2}\sin x\leq\dfrac{1}{2}$, puis $-\dfrac{1}{2}\leq-\dfrac{1}{2}\sin x\leq\dfrac{1}{2}$, et enfin $\dfrac{1}{2}\leq f'(x)\leq\dfrac{3}{2}\cdot$ $f'(x)$ est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$, donc f est strictement croissante.

   (b) On a $f(x)=x$ si et seulement si $\cos x=-\dfrac{1}{2}\cdot$ Cette dernière équation possède une seule solution sur $[0,\pi]$, à savoir $x_0=\dfrac{2\pi}{3}$ (simple connaissance de la fonction cos, qui réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$).
   Maintenant, $f(x)-x=\dfrac{\cos x}{2}+\dfrac{1}{4}$ est une fonction strictement décroissante sur $[0,\pi]$ (nul besoin de dériver !) qui s'annule en x_0, donc est strictement positive sur $[0,x_0[$ et strictement négative sur $]x_0,\pi]$

   (c) Cf Maple. Il convient de faire apparaître les points d'intersection du graphe de f et de la droite d'équation $y=x$.

   (d) Supposons $x\in[0,x_0]$. On a alors $0\leq x\leq x_0$, et la croissance[2] de f sur $[0,\pi]$ donc sur $[0,x_0]$ nous assure que $f(0)\leq f(x)\leq f(x_0)$. Mais $f(0)>0$, et $f(x_0)=x_0$ par construction, donc : $0<f(0)\leq f(x)\leq f(x_0)=x_0$, donc $f(x_0)\in[0,x_0]$.

2. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u_n\in[0,x_0]$". Déjà, $u_0=0\in[0,x_0]$, ce qui établit $\mathcal{P}(0)$. Supposons maintenant $\mathcal{P}(n)$ vérifiée pour un entier $n\in\mathbb{N}$ FIXÉ. On a alors $u_n\in[0,x_0]$, donc d'après la question 1d, $f(u_n)\in[0,x_0]$, c'est-à-dire $u_{n+1}\in[0,x_0]$, ce qui établit exactement $\mathcal{P}(n+1)$.
   Le principe de récurrence nous assure alors que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   (b) Sur le graphe de f, on part du point $(0,0)$, et on remonte au graphe de f : on tombe sur le point $(0,f(0))$, c'est-à-dire (u_0,u_1). Si on rejoint maintenant la droite $y=x$ en se déplaçant horizontalement, on récupère le point (u_1,u_1). Si on va chercher verticalement le graphe de f, on tombe sur le point $(u_1,f(u_1))$, c'est-à-dire (u_1,u_2), etc...

   (c) Déjà, tous les u_n sont dans $[0,x_0]$, et sur cet intervalle, $f(x)\geq x$, donc $f(u_n)\geq u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1}\geq u_n$. La suite u est donc croissante, et majorée par x_0 (ben oui, tous les u_n sont dans $[0,x_0]$...), donc est convergente. Notons l la limite[3]. Maintenant, si on regarde droit dans les yeux la relation $u_{n+1}=f(u_n)$, on peut voir que le membre de gauche tend vers l lorsque $n\to\infty$, et que le membre de droite tend vers $f(l)$ (heu... pourquoi, au fait ?). On a donc $f(l)=l$.
   Au moment d'écrire le corrigé, je sais déjà que je devrai lire dans quelque heures des "On a $f(l)=l$, or $f(x_0)=x_0$, donc $l=x_0$"... Si ça ne vous choque pas, c'est que vous l'avez écrit, ou que vous l'écrirez à la première occasion. Méditez donc ce point.

[1] Et PAF, le radar automatique...
[2] *Bien entendu*, la continuité de f n'a rien à faire ici...
[3] *Bien entendu*, personne ne se sera laissé aller à un "croissante, majorée par x_0, donc convergente vers x_0" ; bien entendu...

Or donc, on a $f(l)=l$. Mais l'inégalité $0\le u_n\le x_0$ passée à la limite donne $0\le l\le x_0$, et sur cet intervalle, x_0 est la SEULE solution de cette équation[4]

3. (a) On a $\dfrac{\delta_{n+1}}{\delta_n}=\dfrac{x_0-u_{n+1}}{x_0-u_n}=\dfrac{f(x_0)-f(u_n)}{x_0-u_n}\cdot$ Mais $u_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}x_0$ d'une part, et d'autre part, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}f'(x_0)$, donc $\dfrac{f(x_0)-f(u_n)}{x_0-u_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f'(x_0)$, soit encore : $\dfrac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f'(x_0)=1-\dfrac{\sin x_0}{2}$, et finalement :

$$\delta_{n+1}\sim\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\delta_n.$$

Notons que l'encadrement peu finaud $1<\sqrt{3}<2$ assure tout de même : $\dfrac12<\lambda=1-\dfrac{\sqrt3}{4}<\dfrac34\cdot$

(b) Notons $\alpha_n=\dfrac{\delta_n}{(4/5)^n}\cdot$ On a $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\dfrac{\lambda}{4/5}<\dfrac{3/4}{4/5}=\dfrac{15}{16}\cdot$ Puisque $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\dfrac{\lambda}{4/5}<\dfrac{15}{16}$, il existe un rang N_0 tel que, pour tout $n\ge N_0$, $0<\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\le\dfrac{15}{16}$, donc $0\le\alpha_{N_0+1}\le\dfrac{15}{16}\alpha_{N_0}$, puis $0\le\alpha_{N_0+2}\le\dfrac{15}{16}\alpha_{N_0+1}\le\left(\dfrac{15}{16}\right)^2\alpha_{N_0}$, et par récurrence immédiate :

$$\forall n\ge N_0,\qquad 0\le\alpha_n\le\left(\frac{15}{16}\right)^{n-N_0},$$

donc $\alpha_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ donc $\delta_n=o\left(\left(\dfrac45\right)^n\right)$.

Cette technique appliquée au rapport $\beta_n=\dfrac{(1/2)^n}{\delta_n}$ permettra de montrer de la même façon $\left(\dfrac12\right)^n=o(\delta_n)$, l'argument clé étant que $\beta_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1/2}{\lambda}\in[0,1[$.

4 Un développement asymptotique

1. f est continue, et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $f'(x)=4x^3+6x^2+1+\dfrac1x$, quantité strictement positive pour tout $x>0$, donc f est strictement croissante. Les limites de f en 0^+ et $+\infty$ sont par ailleurs évidentes (les différents protagonistes étant d'accords) : $f(x)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}-\infty$ et $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. La continuité, la stricte croissance et les limites nous assurent que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Pour le graphe, on se contente de placer $f(1)$ et de respecter les limites.
2. Fixons $n\in\mathbb{N}$. L'application f étant une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, on est certain que n possède un unique antécédent par f.
3. On a $f\left(\dfrac{n^{1/4}}{2}\right)=\dfrac{n}{16}+o(n)\sim\dfrac{n}{16}$, donc $\dfrac{f\left(\dfrac{n^{1/4}}{2}\right)}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\dfrac1{16}$, donc $\dfrac{f\left(\dfrac{n^{1/4}}{2}\right)}{n}\le1$ pour n assez grand. On aura alors :

$$f\left(\frac{n^{1/4}}{2}\right)\le n=f(x_n),$$

et la *stricte* croissance de f nous assure que $\dfrac{n^{1/4}}{2}\le x_n$.

Puisque $\dfrac{n^{1/4}}{2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$, on conclut : $x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

[4]Et PAF le radar automatique : cet argument d'unicité doit forcément apparaître sous uue forme ou une autre

4. On a $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^4$ et $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $f(x_n) \sim x_n^4$. Mais $f(x_n) = n$, donc $x_n^4 \sim n$, et enfin $x_n \sim n^{1/4}$.

   En cas d'état d'âme sur le dernier point, écrire $\dfrac{x_n}{n^{1/4}} = \left(\dfrac{x_n^4}{n}\right)^{1/4} \cdots$

5. $\dfrac{x_n}{n^{1/4}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, or ce rapport vaut $1 + y_n$ par construction, donc $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

6. On suit l'indication de l'énoncé :

$$\begin{aligned} n = f(x_n) &= n(1+y_n)^4 + 2n^{3/4}(1+y_n)^3 + n^{1/4}(1+y_n) + \ln\left(n^{1/4}(1+y_n)\right) \\ &= n\left(1 + 4y_n + o(y_n)\right) + 2n^{3/4} + o(n^{3/4}) \end{aligned}$$

   donc $-2n^{3/4} \sim -2n^{3/4} + o(n^{3/4}) = n\left(4y_n + o(y_n)\right) \sim 4ny_n$ et ainsi $y_n \sim -\dfrac{1}{2n^{1/4}}$, donc $y_n = -\dfrac{1}{2n^{1/4}} + o(1/n^{1/4})$, puis en reportant dans $x_n = n^{1/4}(1+y_n)$:

$$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{2} + o(1).$$

7. On écrit maintenant $x_n = n^{1/4} - \dfrac{1}{2} + \varepsilon_n$, et on réinjecte dans l'équation $f(x_n) = n$ selon le même principe (obtenir un terme équivalent à ε_n égal à un terme équivalent à quelque chose de simple). A la première étape, $f(x)$ avait été évalué simplement au niveau de l'équivalent. Pour prolonger le développement asymptotique de x_n, on avait arraché un terme de plus à $f(x)$. Et pour obtenir un nouveau terme dans le DA de x_n, devinez quoi ?

$$\begin{aligned} n = f(x_n) &= n\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{1/4}}\right)^4 + 2n^{3/4}\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{1/4}}\right)^3 + n^{1/4}(\ldots) + \ln(\ldots) \\ &= n\left(1 - \frac{4}{2n^{1/4}} + 4\frac{\varepsilon_n}{n^{1/4}} + \frac{6}{4n^{1/2}}\right) + 2n^{3/4}\left(1 - \frac{3}{2n^{1/4}} + o(1/n^{1/4})\right) + o(n^{1/2}) \\ &= n + n^{3/4}(-2 + 2 + 4\varepsilon_n) + n^{1/2}(3/2 - 3) + o(1/n^{1/2}) \end{aligned}$$

   donc $4\varepsilon_n n^{3/4} = \dfrac{3}{2}n^{1/2} + o(n^{1/2}) \sim \dfrac{3}{2}n^{1/2}$, donc $\varepsilon_n \sim \dfrac{3}{8n^{1/4}}$, et on doit pouvoir conclure si on est arrivé jusque là.