

**Devoir Maison**  
**Structures Algébriques**

**PROBLEME : SOUS-GROUPES DE  $(\mathbb{R}, +)$**

- 1) Donner deux exemples, bien distincts, de sous-groupes de  $(\mathbb{R}, +)$ .  
On note, pour  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $a\mathbb{Z} = \{na, n \in \mathbb{Z}\}$
- 2) Soit  $a \in \mathbb{R}^+$ . Montrer que  $(a\mathbb{Z}, +)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ .
- 3) Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $G \neq \{0\}$ . On considère :  $\alpha = \inf\{x \in G \mid x > 0\}$ 
  - a) Rappeler la définition et une caractérisation de la borne inférieure
  - b) Supposons dans un premier temps  $\alpha > 0$  et montrons que  $\alpha \in G$ .  
Supposons que  $\alpha \notin G$ .
    - i) Montrer l'existence de  $x \in G$  tel que :  $\alpha < x < 2\alpha$
    - ii) Montrer l'existence de  $y \in G$  tel que :  $\alpha < y < x$
    - iii) Montrer, en considérant  $x - y$  que  $\alpha$  n'est alors plus borne inférieure.
  - c) En déduire  $\alpha\mathbb{Z} \subset G$ .
  - d) Montrer  $G \subset \alpha\mathbb{Z}$ . (Pour cela, on pourra utiliser, après justification, l'existence pour tout  $g \in G$  de  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\beta \in [0, \alpha[$  tels que  $g = n\alpha + \beta$ )
  - e) Supposons maintenant  $\alpha = 0$ .
    - i) A-t-on  $\alpha \in G$ ?
    - ii) Montrer que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in G, 0 < g < \varepsilon$
    - iii) En déduire que  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , i.e.,  
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists t \in G \mid x < t < y$
- 4) Donner un exemple de sous-groupe dense de  $\mathbb{R}$
- 5) On considère  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{p + q\sqrt{2} \mid (p, q) \in \mathbb{Q}^2\}$ 
  - a) Montrer que  $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ .
  - b) Est-il dense ?
  - c) Montrer que  $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \times)$  est un corps.
- 6) En utilisant un isomorphisme, déterminer tous les sous-groupes de  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$

**CORRIGE : SOUS-GROUPES DE  $(\mathbb{R}, +)$**

1) Donner deux exemples, bien distincts, de sous-groupes de  $(\mathbb{R}, +)$ .

$\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}$  sont deux sous-groupes de  $(\mathbb{R}, +)$ , le premier est discret l'autre est dense.

2) Soit  $a \in \mathbb{R}^+$ . On note, pour  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $a\mathbb{Z} = \{na, n \in \mathbb{Z}\}$ . Montrer que  $(a\mathbb{Z}, +)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ .

\*  $a\mathbb{Z}$  est bien une partie de  $\mathbb{R}$ .

\*  $0 = a \times 0 \in a\mathbb{Z}$  donc  $a\mathbb{Z}$  non vide.

\* Soit  $(x, y)$  deux éléments de  $a\mathbb{Z}$ . Il existe deux entiers relatifs  $n$  et  $p$  tels que  $x = a n$  et  $y = a p$ .

Mais alors  $x - y = (n - p) a \in a\mathbb{Z}$

Ainsi, par caractérisation des sous-groupes,  **$a\mathbb{Z}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$**

3) Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $G \neq \{0\}$ . On considère :  $\alpha = \inf\{x \in G \mid x > 0\}$

a) Rappeler la définition et une caractérisation de la borne inférieure

$$\alpha = \inf\{x \in G \cap \mathbb{R}_+^*\} \Leftrightarrow \alpha \text{ est le plus grand minorant de } G \cap \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in G \cap \mathbb{R}_+^*, \alpha \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in G \cap \mathbb{R}_+^* \mid x < \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

b) Supposons dans un premier temps  $\alpha > 0$  et montrons que  $\alpha \in G$ .

Supposons que  $\alpha \notin G$ .

i) Montrer l'existence de  $x \in G$  tel que :  $\alpha < x < 2\alpha$

Soit  $\varepsilon = \alpha$ . On a  $\varepsilon > 0$  donc  $\exists x \in G \cap \mathbb{R}_+^* \mid \alpha \leq x < \alpha + \varepsilon = 2\alpha$ . Mais  $x \neq \alpha$  car  $\alpha \notin G$

**Ainsi il existe un élément  $x$  de  $G$  tel que :  $\alpha < x < 2\alpha$**

ii) Montrer l'existence de  $y \in G$  tel que :  $\alpha < y < x$

Soit  $\varepsilon = x - \alpha$ . On a  $\varepsilon > 0$  donc  $\exists y \in G \cap \mathbb{R}_+^* \mid \alpha \leq y < \alpha + \varepsilon = x$ . Mais  $y \neq \alpha$  car  $\alpha \notin G$

**Ainsi il existe un élément  $y$  de  $G$  tel que :  $\alpha < y < x < 2\alpha$**

iii) Montrer, en considérant  $x - y$  que  $\alpha$  n'est alors plus borne inférieure.

$x$  et  $y$  sont deux éléments du groupe  $G$  donc  $x - y \in G$ . Or  $\alpha < y < x < 2\alpha$  donc  $0 < x - y < \alpha$ . Aussi  $x - y$  est un élément de  $G \cap \mathbb{R}_+^*$  strictement inférieur à  $\alpha$  ce qui est impossible car  $\alpha$  est la borne inférieure de  $G \cap \mathbb{R}_+^*$

**Aussi  $\alpha \in G$**

c) En déduire  $\alpha\mathbb{Z} \subset G$ .

$G$  est stable par  $+$  et par passage à l'opposé donc, puisqu'il contient  $\alpha$ , il contient aussi  $\alpha\mathbb{Z}$  :  **$\alpha\mathbb{Z} \subset G$**

d) Montrer  $G \subset \alpha\mathbb{Z}$ . (Pour cela, on pourra utiliser, après justification, l'existence pour tout  $g \in G$  de  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\beta \in [0, \alpha[$  tels que  $g = n\alpha + \beta$ )

Soit  $g \in G$ . Soit  $n = E\left(\frac{g}{\alpha}\right)$ . On a  $g - n\alpha \in [0, \alpha[$  par définition de la partie entière. On pose  $\beta = g - n\alpha$ .

Puisque  $G$  est stable par  $+$  et par passage à l'opposé, on a  $\beta \in G$ . Mais alors  $\beta = 0$  sinon on aurait trouvé un élément de  $G \cap \mathbb{R}_+^*$  strictement inférieur à  $\alpha$  ce qui est impossible car  $\alpha$  est la borne inférieure de  $G \cap \mathbb{R}_+^*$ . Aussi  $g = n\alpha$ .

**D'où  $G \subset \alpha\mathbb{Z}$**

e) Supposons maintenant  $\alpha = 0$ .

i) A-t-on  $\alpha \in G$ ? Puisque  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ , on a  **$\alpha = 0 \in G$**

ii) Montrer que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in G, 0 < g < \varepsilon$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition de la borne inférieure,  $\exists g \in G \cap \mathbb{R}_+^* \mid 0 = \alpha \leq g < \alpha + \varepsilon = \varepsilon$ . Mais  $g \in \mathbb{R}_+^*$ , donc  $g \neq 0$

**D'où :  $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in G, 0 < g < \varepsilon$**

iii) En déduire que  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , i.e.,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists t \in G \mid x < t < y$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y$ . D'après la question précédente,  $\exists g \in G, 0 < g < y - x$ . Soit  $n = E\left(\frac{x}{g}\right)$ .

On a :  $n g \leq x < (n + 1) g = ng + g < ng + y - x \leq y$ . Ainsi  $(n + 1) g \in G$  et  $x < (n + 1) g < y$ .

**Aussi  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists t \in G \mid x < t < y$  i.e.  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$**

4) Donner un exemple de sous-groupe dense de  $\mathbb{R}$

On a déjà vu que  $\mathbb{Q}$  était un sous groupe dense de  $\mathbb{R}$ . On peut aussi prendre  **$\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{p+q\sqrt{2} \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$**

5) On considère  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{p+q\sqrt{2} \mid (p, q) \in \mathbb{Q}^2\}$

a) Montrer que  $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ .

**$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$**  car il est non vide, stable par  $+$  et par passage à l'opposé.

b) Est-il dense ?

**$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  est dense dans  $\mathbb{R}$**  car il contient  $\mathbb{Q}$  qui est déjà dense dans  $\mathbb{R}$ .

c) Montrer que  $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \times)$  est un corps.

**$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  est un sous-corps de  $(\mathbb{R}, +, \times)$**  car il est non vide, stable par  $+$ , par  $\times$ , par passage à l'opposé et de plus tout élément non nul  $p+q\sqrt{2}$  de  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  a un inverse dans  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  :  $\frac{p}{p^2 - 2q^2} - \frac{q}{p^2 - 2q^2} \sqrt{2}$

6) En utilisant un isomorphisme, déterminer tous les sous-groupes de  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$

exp étant un isomorphisme de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ , **les sous-groupes de  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  sont de la forme  $a\mathbb{Z} = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$**  avec  $a > 0$  ou denses dans  $\mathbb{R}_+^*$