Simulation DS N°1

Nombres Complexes

Durée : 1 heure

Vendredi 4 Octobre 2019

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (5-2i)z + 6 - 4i = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 + 5z + 6)^2 + (2z + 4)^2 = 0$.
3. En déduire quatre nombres réels a, b, c et d tels que :

$$(z^2 + 5z + 6)^2 + (2z + 4)^2 = (z^2 + az + b)(z^2 + cz + d).$$

Exercice 2

Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $a = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $b = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. Montrer que a et b sont conjugués et que la partie imaginaire de a est strictement positive.
2. Calculer $a + b$ et ab. En déduire des expressions simples de a et b.

L'exercice suivant est facultatif.

Exercice 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe une partie I incluse dans $[\![1, n]\!]$ telle que :

$$\left|\sum_{k\in I} z_k\right| \geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Indication : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note :

$$P_\theta = \left\{ j \in [\![1, n]\!] : \theta - \frac{\pi}{2} \leqslant \arg(z_j) \leqslant \theta + \frac{\pi}{2} \right\} \quad et \quad f(\theta) = \left|\sum_{k\in P_\theta} z_k\right|.$$

On cherchera alors à minorer f, puis on intégrera l'inégalité obtenu sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 1

1. Le discriminant de l'équation est $\Delta = (5-2i)^2 - 4(6-4i) = -3-4i$. De plus, $\omega^2 = -3-4i$, avec $\omega = x+iy$, équivaut à (extraction des racines carrés) :

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{-3+5}{2}} = \pm 1 \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{3+5}{2}} = \pm 2 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

Ainsi $\Delta = (1-2i)^2$ et les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-5+2i+(1-2i)}{2} = -2 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-5+2i-(1-2i)}{2} = -3+2i.$$

2. En utilisant l'identité $a^2+b^2 = (a+ib)(a-ib)$, il vient :

$$\begin{aligned}
& (z^2+5z+6)^2 + (2z+4)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (z^2+5z+6+2iz+4i)(z^2+5z+6-2iz-4i) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (z^2+(5+2i)z+6+4i)(z^2+(5-2i)z+6-4i) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & z^2+(5+2i)z+6+4i = 0 \quad \text{ou} \quad z^2+(5-2i)z+6-4i = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \overline{z^2+(5+2i)z+6+4i} = 0 \quad \text{ou} \quad z^2+(5-2i)z+6-4i = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \overline{z}^2+(5-2i)\overline{z}+6-4i = 0 \quad \text{ou} \quad z^2+(5-2i)z+6-4i = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \overline{z} = -2 \quad \text{ou} \quad \overline{z} - 3+2i \quad \text{ou} \quad z = -2 \quad \text{ou} \quad z = -3+2i \\
\Leftrightarrow\ & z = -2 \quad \text{ou} \quad z = -3-2i \quad \text{ou} \quad z = -3+2i
\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, on a la factorisation suivante (attention -2 est racine double) :

$$(z^2+5z+6)^2+(2z+4)^2 = (z+2)^2(z+3-2i)(z+3+2i) = (z^2+4z+4)(z^2+6z+13).$$

Exercice 2

1. Comme $\omega^7 = 1$, on a $\overline{\omega} = \omega^6$, puis :

$$\overline{a} = \overline{\omega} + \overline{\omega}^2 + \overline{\omega}^4 = \omega^6 + \omega^{12} + \omega^{24} = \omega^6 + \omega^5 + \omega^3 = b.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(a) &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) \\
&= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{8\pi}{7} - \pi\right) \\
&= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)
\end{aligned}$$

Comme la fonction sinus est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$, on a $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$. De plus, $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > 0$, donc $\operatorname{Im}(a) > 0$.

2. On a $a + b = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = -1$. On a aussi :

$$\begin{aligned}
ab &= (\omega + \omega^2 + \omega^4)(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) \\
&= \omega^4 + \omega^6 + 1 + \omega^5 + 1 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega^3 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Par conséquent, a et b sont les solutions de l'équation $z^2 + z + 2 = 0$. Les racines de cette équation sont $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Comme la partie imaginaire de a est positive, on a $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ et $b = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$.

FIN