EL Bilia Sup
Prepas MPSI
Prof MAMOUNI

SIMU-DS

Vendredi 04 Octobre 2019

Durée : 1 heure

Programme : Logiq - Complexe

Ex 1 *

on pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} k$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$, $C_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$

1) Mq $A_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2) Mq $B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) On pose $D_n = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right)$

simplifier D_n

4) i) Exprimer D_n en fonction de A_n et B_n

ii) retrouver autrement le resultat $B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5) i) Dire comment ~~calculer~~ calculer C_n

ii) Simplifier C_n

Ex 2 **

on pose $\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} k x^{k-1}}$

où $x \neq 1$ (fixé)

1) Calculer S_0 et S_1 et S_2

2) Montrer par recurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{S_n = \frac{1-(n+1)x^n + n x^{n+1}}{(1-x)^2}}$

3) i) En utilisant un changement d'indice trouver une relation de la forme

$\boxed{S_{n+1} = a S_n + b}$

où a, b dependent de x

ii) En deduire autrement la valeur de S_n

4) Soit $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$

i) Dire pourquoi f est dérivable sur $\mathbb{R}$

ii) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $S_n' = \sum_{k=0}^{n} f_k'$

iii) En déduire autrement la valeur de S_n

5) Simplifier les sommes suivantes

i) $\sum_{k=0}^{n} k\, 2^k$

ii) $\sum_{k=1}^{n} (k+1)\, 2^{-k-2}$

$\boxed{EX\,3}$ *** **BONUS** : Simplifier les sommes suivantes

i) $S_1 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |i-j|$

ii) $S_2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j|$

Mq $S_2 = 2 S_1$

$\boxed{EX\,4}$ *** **BONUS**. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

On veut montrer $S_n = (1+x)^n$

1) Calculer S_0, S_1, S_2

2) Conjecturer une formule simple de S_n

3) On suppose $S_n = (1+x)^n$

i) A l'aide d'un changement d'indice, montrer que

$$S_{n+1} = \sum_{k=-1}^{n} \binom{n+1}{k+1} x^{k+1}$$

ii) A l'aide de la formule du triangle de Pascal

Montrer que

$$S_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

iii) En déduire que

$$S_{n+1} = (1+x) S_n$$

iv) Conclure que $S_{n+1} = (1+x)^{n+1}$

4) En déduire que

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

quand $b \neq 0$

Corrigé

EX 1

① fait dans le cours à faire par récurrence

② " " "

③ Il s'agit d'une somme télescopique donc

$$D_n = (n+1)^3 - 0^3 = (n+1)^3$$

4) i) $(k+1)^3 - k^3 = \cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1 - \cancel{k^3}$

donc $D_n = \sum_{k=0}^{n} (3k^2 + 3k + 1)$

$$= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

$$D_n = 3B_n + 3A_n + (n+1)$$

ii) $\cancel{D_n = 3n(n+1)(2n+1}$

$$(n+1)^3 = 3B_n + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$3B_n = (n+1)^3 - \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

$$= (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{n}{2} - 1\right]$$

$$= (n+1)\left(\frac{2n^2 + 4n + \cancel{2} - n - \cancel{2}}{2}\right)$$

$$3B_n = (n+1)\frac{(2n^2+n)}{2} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{2}$$

donc $B_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5) i) On pose $E_n = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right)$

Comme E_n est télescopique

on obtient $E_n = (n+1)^4$

D'autre part

$$(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

donc $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

et $E_n = 4C_n + 6B_n + 4A_n + (n+1)$

$$\boxed{C_n = \frac{E_n - 6B_n - 4A_n - (n+1)}{4}} \quad \star$$

ii) utiliser $(\star)$ et $A_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

et $E_n = (n+1)^4$

pour trouver $C_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Z

EX 2

1) $S_0 = 0$, $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 2x$

2) pour $n = 0$ le resultat est vrai

supposons vrai pour n

donc $S_{n+1} = S_n + (n+1)x^n$

$$= \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} + (n+1)x^n$$

$$= \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1} + (1-x)^2(n+1)x^n}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1} + (n+1)x^n(x^2 - 2x + 1)}{''}$$

$$= \frac{1-\cancel{(n+1)x^n} + nx^{n+1} + (n+1)x^{n+2} - 2(n+1)x^{n+1} + \cancel{(n+1)x^n}}{''}$$

$$= \frac{1 + x^{n+1}\underbrace{(n - 2(n+1))}_{-(n+2)} + (n+1)x^{n+2}}{''}$$

(4)

3) i) $S_n = \sum_{k=0}^{n} k x^{k-1}$ $\quad k \to k+1$

$= \sum_{k=-1}^{n-1} (k+1) x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) x^k$

1^{er} terme $= 0$

$= \sum_{k=0}^{n-1} k x^k + \sum_{k=0}^{n-1} x^k$

$= \sum_{k=0}^{n} k x^k - n x^n + \frac{1-x^n}{1-x}$

$S_n = x S_n + \frac{1-x^n}{1-x} - n x^n$

$S_n = x S_n + \frac{1-x^n - n x^n (1-x)}{1-x}$

$S_n = x S_n + \frac{1-x^n - n x^n + n x^{n+1}}{1-x}$

$$\boxed{S_n = x S_n + \frac{1-(n+1)x^n + n x^{n+1}}{1-x}}$$

ii) Selon 3. i) on a

$S_n(1-x) = \frac{1-(n+1)x^n + n x^{n+1}}{1-x}$

d'où le resultat.

4) i) Comme somme de fct dérivable

ii) Hérédité. supposons vrai pour n

$S_{n+1} = S_n + f_{n+1}$

donc $S_{n+1}' = S_n' + f_{n+1}' = \sum_{k=0}^{n} f_k' + f_{n+1}'$

$= \sum_{k=0}^{n+1} f_k'$

iii) posons $f_k(x) = x^k$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} f_k' = \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)'$

$= \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \dots$

5) i) $\sum_{k=0}^{n} k2^k = 2\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1}$ pour prendre $x=2$ dans S_n

ii) $\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^{-k-2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$k+1 \to k$ et $k \to k-1$

$= \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n+2} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n+2} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\right)$

$x = 1/2$ dans S_{n+2}

$\boxed{\text{EX3}}$

i) $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} |i-j| = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} (j-i)$ car $j \geq i$

$= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} j - \sum_{1\leq i\leq j\leq n} i$

$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right)$

ct

$= \sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2}$ $\qquad \frac{j^2}{2} + j/2$

$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4}$

Ex 3

ii) $S_2 = \sum_{1 \le i,j \le n} |i-j|$ le cas $i=j$ donne $|i-j|=0$

$= \sum_{1 \le i \le j \le n} |i-j| + \sum_{1 \le j \le i \le n} |i-j|$

$= \sum_{1 \le i \le j \le n} |i-j| + \sum_{1 \le j \le i \le n} |j-i|$

on permute les notations

indice muet

$i \to j$

$j \to i$

$= S_1 + S_1 = 2S_1$

Ex 4

1) $S_0 = 1$, $S_1 = 1+x$, $S_2 = 1 + 2x + x^2 = (1+x)^n$

2) $S_n = (1+x)^n$

3) i) $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$ $\quad k \to k+1$

$= \sum_{k=-1}^{n} \binom{n+1}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k+1} x^{k+1}$

~~cas 1er terme~~

ii) PASCAL $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

donne que

$S_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k+1} x^{k+1}$

$= 1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} x^k$ $\quad k+1 \to k$

$= 1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$ $\quad$ dernier terme $\binom{n}{n+1} = 0$

3) iii) Selon qst 3-ii on obtient

$$S_{n+1} = 1 + x S_n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k - 1$$

$$S_{n+1} = x S_n + S_n = (x+1) S_n$$

iv) Comme $S_n = (1+x)^n$

et $S_{n+1} = (1+x) S_n$

on obtient

$$S_{n+1} = (1+x)^{n+1}$$

4) $(a+b)^n = \left(\left(\frac{a}{b}+1\right)b\right)^n$

$= \left(1+\frac{a}{b}\right)^n \cdot b^n$ $x = \frac{a}{b}$ qst 3

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{b}\right)^k \cdot b^n$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^k}{b^k} \cdot b^n$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Fin

A La PROCHAINE