Devoir Surveillé N°2

Nombres Complexes Fonctions Usuelles Equations Différentielles

Vendredi 01 Novembre 2019

Durée : 3h30

Partie I: Nombres Complexes

Problème A :

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \longmapsto z(1-z)$.

1. Déterminer les points fixes de z, c'est à dire résoudre $f(z) = z$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, résoudre $\sin(\frac{\theta}{2}) \geq 0$.
3. Déterminer le module et un argument de $f(e^{i\theta})$, on discutera selon les valeurs de θ.
   Indication : on pourra penser à utiliser l'angle moitié.
4. L'implication $(z \in \mathbb{U} \Rightarrow f(z) \in \mathbb{U})$ est-elle vraie ?
5. Montrer à l'aide de l'inégalité triangulaire que : $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2} \Rightarrow |f(z) - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$.
   Indication : $z(1-z) = (z - \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - z) + \frac{1}{4}$.

Problème B :

On considére la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{\sin(3x)}{\sin(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Étudier la parité de la fonction h.
3. Simplifier l'expression $h(x + \pi)$. Que peut-on en déduire sur la fonction h ?
4. Quel est le domaine d'étude de la fonction h ?
5. Écrire $(\cos(x) + i\sin(x))^3$ sous forme algébrique.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer deux expressions diffèrentes de $Im((\cos(x) + i\sin(x))^3)$ où $Im(z)$ est la partie imaginaire d'un nombre complexe z.
7. En déduire une nouvelle expression g de la fonction h.
8. Quel est l'ensemble de définition de g ?

Problème C :

Ce problème illustre la méthode générale de Cardan pour résoudre les équations du troisième degré à travers l'exemple suivant :

$$(E) \qquad x^3 + 3x^2 + (3-6i)x + 2i = 0$$

1. On effectue le changement d'inconnue $x = z + h$ dans l'équation (E). Montrer que pour une valeur de h bien choisie, l'équation en z obtenue ne comporte pas de terme de degré deux.
2. On considère l'équation :

$$(F) \qquad z^3 - 6iz - 1 + 8i = 0$$

Soient $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, on pose $U = u^3$ et $V = v^3$. On suppose que :

$$\begin{cases} U + V = 1 - 8i \\ uv = 2i \end{cases}$$

(a) Démontrer que $z = u + v$ est une solution de (F).

(b) Sous les mêmes hypothèses, montrer que U et V sont les racines de l'équation du second degré :

$$Z^2 - (1-8i)Z - 8i = 0$$

(c) Résoudre cette équation du second degré (on choisira $U \in \mathbb{R}$).

(d) En déduire les valeurs possibles de u et v.

(e) En déduire une solution $z0$ de (F).

(f) Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$z^3 - 6iz - 1 + 8i = (z - 1 - 2i)(z^2 + az + b)$$

(g) Déterminer les racines du polynôme $z^2 + az + b$ où a et b sont les valeurs trouvées précédemment. $(\sqrt{225} = 15)$

3. En déduire les solutions de (E).

Partie II: Equations Différentielles

Exercice 1

1. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto x \ln x$.

2. Déterminer les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E): \quad xy'(x) + 2y(x) = \ln x$$

Exercice 2 Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 + x + 1.$$

Exercice 3

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(E) \ : \ x(x^2-1)y'(x) + 2y(x) = x$$

On cherche les solutions de (E) définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1. Justifier que l'on va résoudre l'équation différentielle (E) sur les intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$ et $I_4 =]1, +\infty[$. On note dans la suite I l'un de ces intervalles.
2. Trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\dfrac{2}{x(x^2-1)} = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{x+1} + \dfrac{\gamma}{x-1}$.
3. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur I.
4. Résoudre l'équation (E) sur I.

Afin de pouvoir aborder la question 5., vous pouvez admettre que les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle I sont de la forme : $y : x \mapsto \dfrac{\lambda x^2 - x}{x^2 - 1}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. (a) Déterminer les solutions de (E) sur $]-1, 1[$.
   (b) Déterminer les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$.
   (c) Déterminer les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.
   (d) L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 (Une équation fonctionnelle) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie III: Fonctions Usuelles

Problème : À la découverte de l'arctangente

A-Simplification de Arctan(x) + Arctan(y)

Soient x et y deux réels, le but de cette partie est de simplifier l'expression $\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)$ et d'étudier quelques applications de ce résultat.

1. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $y=\dfrac{1}{x}$ avec x un réel non nul. On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'.

   (b) En déduire que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x>0\\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

2. Dans cette question, on considère $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $xy\neq 1$.

   (a) i. Montrer que pour tout $a\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$: $\cos^2(a)=\dfrac{1}{1+\tan^2(a)}$.

   ii. En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(\operatorname{Arctan}(x))=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

   iii. En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \sin(\operatorname{Arctan}(x))=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

   (b) Montrer que : $\cos(\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y))=\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$.

   (c) En déduire que : $\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)\in\left]-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$.

   (d) Donner une simplification de $\tan(\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y))$.

   (e) On suppose $xy<1$, à l'aide de la question b) montrer que $\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. En déduire que :

$$\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

   (f) On suppose $xy>1$ et $x>0$, montrer que $\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$. En déduire que :

$$\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+\pi$$

   (g) Traiter pour finir le cas où $xy>1$ et $x<0$, en démontrant que :

$$\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)-\pi$$

3. Résumer tous les cas précédents en donnant une simplification de $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)$ selon les valeurs de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. (a) Etablir que $2\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)$.
   (b) En déduire que $4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right)$.
   (c) Démontrer la formule de Machin : $\frac{\pi}{4} = 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$.

B-Approximation polynomiale de la fonction Arctan

1. Soit q un nombre réel et n un entier naturel. En reconnaissant une suite géométrique, simplifier : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^k$.
2. Pour tout entier naturel n et tout réel $x \geq 0$, on pose :
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$
   Calculer $S_n'(x)$ et en donner une expression simplifiée sans le signe Σ.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \geq 0$, on pose $R_n(x) = \text{Arctan}(x) - S_n(x)$.
   (a) Calculer $R_n(0)$.
   (b) Etablir les variations de la fonction R_n sur $\mathbb{R}_+$, on pourra distinguer les cas n pair et n impair.
   (c) Pour $x \geq 0$, comparer les nombres $S_n(x)$, $\text{Arctan}(x)$ et $S_{n+1}(x)$ selon la parité de n.
   (d) En déduire que pour tout $x \geq 0$ et pour tout entier naturel n, on a :
$$|\text{Arctan}(x) - S_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$
4. (a) Démontrer que $\pi = \lim_{n \to +\infty} 4 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
   (b) Expliquer comment obtenir une valeur approchée de π à 10^{-6} près.