Nombres Réels

Simulation Concours Blanc N+2

2 Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$

2.1 Classification des sous-groupes de $\mathbb{R}$

Pour un réel strictement positif $\alpha > 0$, on note $\alpha\mathbb{Z} = \{k\alpha \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$.

$\boxed{Q\ 2}$ Montrez que $\forall\alpha > 0$, la partie $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R},+)$.

$\boxed{Q\ 3}$ Montrez que $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

On considère maintenant un sous-groupe G du groupe $(\mathbb{R},+)$. On va montrer l'alternative :

1. G est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha > 0$;
2. ou alors G est une partie dense de $\mathbb{R}$.

On note

$$G^+ = G\cap]0,+\infty[= \{x \in G \mid x > 0\}$$

$\boxed{Q\ 4}$ Si l'on suppose que $G \neq \{0\}$, montrez que la partie G^+ est non-vide, et qu'elle admet une borne inférieure $\alpha \geq 0$. Que vaut cette borne inférieure α lorsque $G = \mathbb{Z}$ et lorsque $G = \mathbb{Q}$?

On suppose dans un premier temps que $\alpha > 0$.

$\boxed{Q\ 5}$ Montrez que $\alpha \in G^+$. On pourra pour cela raisonner par l'absurde et utiliser la caractérisation de la borne inférieure avec $\varepsilon = \alpha$.

$\boxed{Q\ 6}$ Montrez alors que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

On suppose maintenant que $\alpha = 0$.

$\boxed{Q\ 7}$ Montrez que la partie G est dense dans $\mathbb{R}$.

2.2 Applications

On considère deux réels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On définit alors

$$G(a,b) = \{pa + qb\ ;\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$$

$\boxed{Q\ 8}$ Montrez que $G(a,b)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

$\boxed{Q\ 9}$ On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{5}$.

1. Montrez que la borne inférieure α de G^+ vérifie $\alpha \geq \dfrac{1}{15}$;
2. Déterminez deux entiers $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $5u + 3v = 1$;
3. En déduire que $G(1/3,1/5) = \dfrac{1}{15}\mathbb{Z}$.

$\boxed{Q\ 10}$ On suppose dans cette question que $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$. On note α la borne inférieure de la partie G^+.

1. Montrez que le réel $\sqrt{3}$ est irrationnel ;
2. Montrez que $\alpha = 0$.

On a donc montré que le sous-groupe $G(1,\sqrt{3})$ était dense dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{Q\ 11}$ On considère une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue qui est à la fois 1-périodique et $\sqrt{3}$-périodique. On notera

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(0)\}$$

1. Montrez que $G(1,\sqrt{3}) \subset H$;
2. Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de H qui converge vers le réel x ;
3. En déduire que la fonction f est constante.

Corrigé

$\boxed{Q\ 2}$ Vérifions que $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R},+)$:

- $0 \in \alpha\mathbb{Z}$ $(0 = 0 \times \alpha)$;
- Soient deux éléments $(x,y) \in (\alpha\mathbb{Z})^2$. Montrons que $(x-y) \in \alpha\mathbb{Z}$. Comme $x \in \alpha\mathbb{Z}$, il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $x = k_1\alpha$. De même, il existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $y = k_2\alpha$. Alors $x - y = (k_1 - k_2)\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$.

$\boxed{Q\ 3}$ On le vérifie facilement comme à la première question.

$\boxed{Q\ 4}$ Comme on suppose que $G \neq \{0\}$, il existe un élément $g \neq 0$ dans la partie G. Comme G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, son symétrique $-g$ est également un élément de G. L'un des deux éléments g ou $-g$ est strictement positif et appartient donc à l'ensemble G^+. Par conséquent, $G^+ \neq \emptyset$.
Comme G^+ est une partie non-vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0, elle admet une borne inférieure α et puisque 0 est un minorant de G^+, $0 \leq \alpha$ (la borne inférieure d'une partie est le plus grand des minorants).

$\boxed{Q\ 5}$ Supposons par l'absurde que $\alpha \notin G$. D'après la caractérisation de la borne inférieure de G^+, avec $\varepsilon = \alpha > 0$, il existe $g_1 \in G^+$ tel que $\alpha < g_1 < 2\alpha$. En posant ensuite $\varepsilon = g_1 - \alpha > 0$, il existe $g_2 \in G^+$ tel que $\alpha < g_2 < g_1$. Posons $g = g_1 - g_2$. Puisque G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, $g_1 - g_2 \in G$. Or $g > 0$ et donc $g \in G^+$. Mais alors on aurait $\alpha < g_2 < g_1 < 2\alpha$, et donc $0 < g < \alpha$, ce qui est impossible puisque $\alpha = \inf G^+$.

$\boxed{Q\ 6}$ Comme $\alpha \in G$, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n\alpha \in G$. Par récurrence sur n :

$$\mathcal{P}(n) \ : n\alpha \in G$$

$\mathcal{P}(0)$ est vérifiée puisque comme G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, $0 \in G$.
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ D'après $\mathcal{P}(n)$, $n\alpha \in G$. Comme $\alpha \in G$ et que G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, $\alpha + n\alpha \in G$. Donc $(n+1)\alpha \in G$.
Ensuite, montrons que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $k\alpha \in G$. Si $k \geq 0$, on a montré que $k\alpha \in G$. Si $k < 0$, alors $-k \in \mathbb{N}$ donc $(-k)\alpha \in G$. Mais comme G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, le symétrique d'un élément est encore dans G. Par conséquent, $-(-k)\alpha = k\alpha \in G$.
On a donc montré que $\boxed{\alpha\mathbb{Z} \subset G}$. Montrons maintenant que $\boxed{G \subset \alpha\mathbb{Z}}$.
Soit $g \in G$. Comme $\alpha > 0$, d'après un théorème du cours, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k\alpha \leq g < (k+1)\alpha$. On a $0 \leq g - k\alpha < \alpha$. Mais comme $k\alpha \in G$ (montré précédemment) et que $g \in G$, puisque G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, il vient que $h = g - k\alpha \in G$. Or $\alpha = \inf G^+$, et donc il est impossible que $h > 0$ puisque $h < \alpha$. Par conséquent, la seule possibilité est que $h = 0$, c'est à dire $g = k\alpha$. Mais alors $g \in \alpha\mathbb{Z}$.

$\boxed{Q\ 7}$ Soit un réel $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $g \in G$ tel que $|g - x| \leq \varepsilon$.
Comme $0 = \inf G^+$, par la caractérisation de $\inf G^+$, il existe un élément $g^+ \in G^+$ tel que $0 < g^+ < \varepsilon$. Alors d'après un théorème du cours, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $kg^+ \leq x < (k+1)g^+$. On a alors $0 \leq x - kg^+ < g^+ < \varepsilon$. Mais puisque $g^+ \in G$, et que G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, on a $kg^+ \in G$. Posons donc $g = kg^+ \in G$. Puisque $0 \leq x - g < \varepsilon$, on a bien $|x - g| \leq \varepsilon$.

$\boxed{Q\ 8}$ On le montre facilement.

$\boxed{Q\ 9}$

1. Soit $g \in G(1/3,1/5)^+$. Il existe $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $g = \dfrac{p}{3} + \dfrac{q}{5} = \dfrac{5p+3q}{15}$. Mais comme l'entier $(3p+5q)$ est non nul ($g \in G^+$), il vérifie $|3p+5q| \geq 1$ et donc $g = |g| \geq \dfrac{1}{15}$. Donc $1/15$ est un minorant de l'ensemble G^+ et donc sa borne inférieure vérifie $1/15 \leq \alpha$.
2. Il suffit de poser $u = 2$ et $v = -3$.
3. Comme $1/15 \in G^+$, on a $\alpha \leq 1/15$ et d'après la question précédente, on tire que $\alpha = 1/15$.
4. Comme $G(1/3,1/5)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, et que $\alpha > 0$, d'après l'étude précédente, on sait que $G(1/3,1/5) = \alpha\mathbb{Z}$.

$\boxed{Q\ 10}$

1. Par l'absurde, si $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, il existerait $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $\sqrt{3} = p/q$, mais alors on aurait $3q^2 = p^2$. Or en examinant la décomposition de p^2 en facteurs premiers, on voit que la puissance de 3 doit être paire, alors que dans la décomposition de $3q^2$ en facteurs premiers, cette puissance est impaire, une absurdité.
2. Par l'absurde, si $\alpha > 0$, on aurait alors $G(1,\sqrt{3}) = \alpha\mathbb{Z}$. Par conséquent, puisque $1 \in G$ et que $\sqrt{3} \in G$, il existerait deux entiers $(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $1 = q\alpha$ et $\sqrt{3} = p\alpha$. On aurait alors $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, une absurdité.

$\boxed{Q\ 11}$

- On montre facilement par récurrence que $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$, puis que $\forall q \in \mathbb{Z}$, $f(x+q\sqrt{3}) = f(x)$ et enfin que $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}$, $f(p+q\sqrt{3}) = f(0)$. Donc $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $p+q\sqrt{3} \in H$ et donc $G(1,\sqrt{3}) \subset H$.
- Puisque $G(1,\sqrt{3})$ est dense dans $\mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists h \in H \text{ tq } |x-h| \leq \varepsilon$$

  En particulier, si $n \in \mathbb{N}^\star$, en prenant $\varepsilon = 1/n > 0$, il existe $x_n \in H$ tel que $|x - x_n| \leq 1/n$. On construit ainsi une suite d'éléments de $G(1,\sqrt{3})$ c'est à dire d'éléments de H qui converge vers le réel x.
- Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite de points (x_n) de H telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Or puisque $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $x_n \in H$, on a $f(x_n) = f(0)$. Comme la fonction f est continue au point x, et que la suite (x_n) converge vers x, d'après le théorème de l'image continue d'une suite, la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers $f(x)$. Or puisque la suite $\big(f(x_n)\big)$ est constante, elle converge également vers $f(0)$. Par unicité de la limite, on en déduit que $f(x) = f(0)$. On a montré que la fonction f était constante.