Suites Numériques

Simulation Concours Blanc (1 heure)

$$M(x,y) = \frac{\pi}{2} \Big/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta}}$$
$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x+y}{K\left(\frac{x-y}{x+y}\right)}$$

FIGURE 1 – *Karl F. Gauss a obtenu une formule exacte donnant la moyenne arithmético-géométrique de a et b à l'aide d'une intégrale elliptique, mais ce n'est pas celle-là qu'on va prouver aujourd'hui !*

: Moyenne arithmético-géométrique

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, un couple de réels positifs ou nuls.

Partie I. Étude de deux suites imbriquées

On définit deux suites par $a_0 = a,\ b_0 = b$, et les relations de récurrence :

- $\forall n \in \mathbf{N},\quad a_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}$
- $\forall n \in \mathbf{N},\quad b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$

1. Déterminez les deux suites lorsque $a = 0$, ou lorsque $b = 0$, ou lorsque $a = b$.

2.a. Montrez que $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.

b. Montrez que $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ |a_n - b_n| \leqslant \dfrac{|b_0 - a_0|}{2^n}$

c. Montrez que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite, appelée **moyenne arithmético-géométrique** de a et b. On note

$$\boxed{\mathfrak{M}(a,b) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n}$$

3. Explicitez $\mathfrak{M}(a,0),\ \mathfrak{M}(0,b),\ \mathfrak{M}(a,a)$.

4.a. Montrez que $\mathfrak{M}(a,b) = \mathfrak{M}(b,a)$.

b. Montrez que si $\lambda \in \mathbf{R}^+$ est un réel positif, alors $\mathfrak{M}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathfrak{M}(a,b)$.

c. Montrez que $\mathfrak{M}(a,b) = \mathfrak{M}\left(\sqrt{ab}, \dfrac{a+b}{2}\right)$.

d. Vérifiez que $\sqrt{ab} \leqslant \mathfrak{M}(a,b) \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

Partie II. Étude d'une fonction

On étudie la fonction $F : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par $\forall x \in \mathbf{R}^+,\ F(x) = \mathfrak{M}(1,x)$.

1. Calculez $F(0),\ F(1)$.

2. Montrez que $\forall x \in \mathbf{R}^+,\ F(x) \geqslant 0$.

3. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ tel que $x \leqslant y$. On considère les suites $(a_n),(b_n)$ d'une part et $(\alpha_n),(\beta_n)$ d'autre part, définies par $a_0 = 1, b_0 = x$; $\alpha_0 = 1, \beta_0 = y$ et les relations de récurrence :

- $\forall n \in \mathbf{N},\quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$
- $\forall n \in \mathbf{N},\quad b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$
- $\forall n \in \mathbf{N},\quad \alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n \beta_n}$
- $\forall n \in \mathbf{N},\quad \beta_{n+1} = (\alpha_n + \beta_n)/2$

Montrez que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N},\ a_n \leqslant \alpha_n$ et $b_n \leqslant \beta_n$.
Déduisez-en que F est croissante.

4.a. Montrez que pour tout réel positif $x \in \mathbf{R}^+$, on a $\sqrt{x} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{1+x}{2}$.

b. Qu'en déduisez-vous concernant les limites de $F(x)$ lorsque x tend vers 1, vers $+\infty$?

5. Justifiez pour tout réel x strictement positif, les trois formules suivantes :

a. $F(x) = x\, F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **b.** $F(x) = \sqrt{x}\, F\left(\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$ **c.** $F(x) = \dfrac{1+x}{2}\, F\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$

PROBLÈME 1

Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, deux réels positifs ou nuls.

Partie I. Étude de deux suites imbriquées

On définit deux suites par $a_0 = a,\ b_0 = b$, et les relations de récurrence :

- $\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}$
- $\forall n \in \mathbf{N}, \quad b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$

1.
- lorsque $a = 0$, la suite (a_n) est constante égale à 0, par conséquent, la suite (b_n) est la suite géométrique de premier terme b de raison $\dfrac{1}{2}$:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = 0 \text{ et } b_n = \frac{b}{2^n}$$

- lorsque $b = 0$, alors $a_1 = 0$. Par conséquent $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est nulle et par conséquent la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite géométrique de premier terme $\dfrac{a}{2}$ et de raison '$\dfrac{1}{2}$:

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad a_n = 0 \text{ et } b_n = \frac{a}{2^n}$$

- lorsque $a = b$. Les suites (a_n) et (b_n) sont constantes :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = a \text{ et } b_n = b$$

▲

2.a. Soit $n \in \mathbf{N}$, on a par construction :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)^2}{2} \geqslant 0$$

En particulier, pour tout entier naturel non nul $a_n \leqslant b_n$.
Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0$ et $a_{n+1}/a_n = \sqrt{b_n/a_n} \geqslant 1$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$$

▲

b. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)^2}{2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} \times \frac{b_n - a_n}{2} \\ &\leqslant \frac{b_n - a_n}{2} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, une récurrence immédiate, permet d'en déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ |a_n - b_n| \leqslant \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}$$

▲

c. D'après les deux questions précédentes,

- la suite (a_n) est croissante
- la suite (b_n) est décroissante,
- la suite $(b_n - a_n)$ est convergente vers 0 par comparaison à une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Ainsi, les suites (a_n) et (b_n) sont -elles adjacentes. D'après le **théorème de convergence des suites adjacentes**, elles sont donc convergentes et convergent vers la même limite, appelée **moyenne arithmético-géométrique** de a et b. On note

$$\boxed{\mathfrak{M}(a,b) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n}$$

▲

3. D'après les exemples de la première question, il vient $\mathfrak{M}(a,0) = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\mathfrak{M}(0,b) = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\mathfrak{M}(a,a) = a$. ▲

4.a. On considère les suites $(a_n), (b_n)$ d'une part et $(\alpha_n), (\beta_n)$ d'autre part, définies par $a_0 = a, b_0 = b$; $\alpha_0 = b, \beta_0 = a$ et les relations de récurrence :

- $\forall n \in \mathbf{N},\quad a_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}$
- $\forall n \in \mathbf{N},\quad b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$

- $\forall n \in \mathbf{N},\quad \alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n\, \beta_n}$
- $\forall n \in \mathbf{N},\quad \beta_{n+1} = (\alpha_n + \beta_n)/2$

Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \left\{\begin{array}{lcl} \alpha_n & = & a_n \\ \beta_n & = & b_n \end{array}\right.$$

En particulier, les suites (a_n) et (α_n) ont même limite :

$$\mathfrak{M}(a,b) = \mathfrak{M}(b,a)$$

▲

b. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^+$ est un réel positif. On considère les suites (α_n) et (β_n) définies par

$$\alpha_0 = \lambda\, a,\ \beta_0 = \lambda\, b \text{ et } \begin{array}{ll} \bullet & \forall n \in \mathbf{N},\quad \alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n\, \beta_n} \\ \bullet & \forall n \in \mathbf{N},\quad \beta_{n+1} = (\alpha_n + \beta_n)/2 \end{array}$$

Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left\{\begin{array}{lcl} \alpha_n & = & \lambda\, a_n \\ \beta_n & = & \lambda_; b_n \end{array}\right.$$

Or, par construction, la suite (α_n) est convergente de limite $\mathfrak{M}(\lambda\ a, \lambda\ b)$. D'autre part, par OPA, la suite $(\lambda\ a_n)$ est convergente de limite $\lambda\,\mathfrak{M}(a,b)$.
Par **unicité de la limite**, il s'ensuit que

$$\mathfrak{M}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathfrak{M}(a,b).$$

▲

c. Par construction, on a $a_1 = \sqrt{ab}$ et $b_1 = \dfrac{a+b}{2}$. Or les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont toutes deux convergentes de limite $\mathfrak{M}(a,b)$, comme **suites extraites de suites convergentes**. D'autre part, les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont définies par la donnée de leurs premiers termes, a_1 et b_1 ainsi que les relations de récurrence :

- $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}$
- $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$

Par définition, elles sont adjacentes et convergent toutes deux vers $\mathfrak{M}(a_1, b_1)$.
Par **unicité de la limite**, il s'ensuit que

$$\mathfrak{M}(a,b) = \mathfrak{M}\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$$

▲

d. Comme les suites (a_n) (croissante) et (b_n) (décroissante) sont adjacentes de limite commune $\mathfrak{M}(a,b)$, il découle du **corollaire sur les suites adjacentes** que $\sqrt{ab} = a_1 \leqslant \mathfrak{M}(a,b) \leqslant b_1 = \dfrac{a+b}{2}$. ▲

Partie II. Étude d'une fonction

On étudie la fonction $F : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par $\forall x \in \mathbf{R}^+,\ F(x) = \mathfrak{M}(1,x)$.

1. D'après les résultats de la question **I.3.** $F(0) = \mathfrak{M}(0,1) = 0,\ F(1) = \mathfrak{M}(1,1) = 1$. ▲

2. $\forall x \in \mathbf{R}^+$, $\mathfrak{M}(x,1) \geqslant 0$. Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbf{R}^+,\ F(x) \geqslant 0$$

▲

3. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ tel que $x \leqslant y$. On considère les suites $(a_n), (b_n)$ d'une part et $(\alpha_n), (\beta_n)$ d'autre part, définies par $a_0 = 1, b_0 = x$; $\alpha_0 = 1, \beta_0 = y$ et les relations de récurrence :

- $\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}$
- $\forall n \in \mathbf{N}, \quad b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$
- $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n\, \beta_n}$
- $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \beta_{n+1} = (\alpha_n + \beta_n)/2$

On montre par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, que $\forall n \in \mathbf{N},\ a_n \leqslant \alpha_n \quad \text{et} \quad b_n \leqslant \beta_n$.

- **Init :** pour $n = 0$, $a_0 = 1 = \alpha_0$, $b_0 = x \leqslant y = \beta_0$.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $a_n \leqslant \alpha_n \quad \text{et} \quad b_n \leqslant \beta_n$. Alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \leqslant \sqrt{\alpha_n \beta_n} = \alpha_{n+1} \\ b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} = \beta_{n+1} \end{aligned}$$

- **Conclusion :** Par récurrence, on a bien montré que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ a_n \leqslant \alpha_n \quad \text{et} \quad b_n \leqslant \beta_n$$

Comme la suite (a_n) (resp. $(\alpha)_n$ est convergente de limite $F(x)$ (resp. $F(y)$), il s'ensuit par **passage à la limite dans une inégalité** que

$$F(x) \leqslant F(y)$$

Ceci étant vrai pour tout couple $(x, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ tel que $x \leqslant y$, on en déduit que F est croissante. ▲

4.a. Soit $x \in \mathbf{R}^+$. D'après la question **I.4.d**, on a directement

$$\sqrt{x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{1+x}{2}$$

▲

b. ▹ clairement, $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x} = 1 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+x}{2}$. Par encadrement, il s'ensuit que

$$\lim_{x\to 1} F(x) = 1 = F(1)$$

▹ comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, il en résulte aussi par comparaison que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$$

▲

5. Soit $x \in \mathbf{R}^{+\star}$.

a. $F(x) = \mathfrak{M}(1, x) = x\ \mathfrak{M}(\frac{1}{x}, 1) = x\ \mathfrak{M}(1, \frac{1}{x}) = xF(\frac{1}{x})$

b. $F(x) = \mathfrak{M}(\sqrt{x}, \frac{1+x}{2}) = \sqrt{x}\ \mathfrak{M}(1, \frac{1+x}{2\sqrt{x}}) = \sqrt{x}\ F(\frac{1+x}{2\sqrt{x}})$.

c. En combinant les deux résultats précédents, $F(x) = \sqrt{x}\ F(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}) = \frac{1+x}{2}\ F(\frac{2\sqrt{x}}{1+x})$ ▲