Fonctions Réelles

Préparation DS N°4

EXERCICE 1 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On note $M = \max\limits_{[a,b]} |f''|$.

1. Justifier l'existence de M.

Montrer qu'il existe une unique fonction affine φ telle que $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$. Expliciter $\varphi(t)$ pour $t \in [a,b]$.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note ψ_λ la fonction définie sur $[a,b]$ par

$$\psi_\lambda(t) = f(t) - \varphi(t) - \lambda(t-a)(t-b) .$$

On se donne $x \in]a,b[$. Montrer que l'on peut choisir λ (et expliciter la valeur de λ en fonction de x) de façon que $\psi_\lambda(x) = 0$.

Montrer alors l'existence d'un $c \in]a,b[$ tel que $\psi''_\lambda(c) = 0$.

3. De la question **2.**, déduire la majoration de l'erreur commise en remplaçant l'arc de courbe par sa corde sur le segment $[a,b]$:

$$\forall x \in [a,b] \qquad |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x) .$$

4. En déduire $\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \right| \leq \frac{M}{12}(b-a)^3$.

EXERCICE 2 :

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \arccos(\operatorname{th} x) \qquad ; \qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right) .$$

Sont-elles dérivables sur $\mathbb{R}$? Calculer leurs dérivées lorsqu'elles sont définies. En déduire une relation simple entre $f(x)$ et $g(x)$.

PROBLÈME :

On pose $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$ pour tout réel x différent de 1.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$.

1. Étudier les variations et les limites de f, construire sa courbe représentative.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{e^x}{(1-x)^{n+1}}\, P_n(x) ,$$

où P_n est une fonction polynôme ; on exprimera $P_n(x)$ à l'aide de $P_{n-1}(x)$ et $P'_{n-1}(x)$.

3. Calculer $P_n(1)$. Quel est le terme dominant (terme de plus haut degré) du polynôme P_n ?

4. En dérivant n fois la relation $(1-x)\,f(x) = e^x$, démontrer la relation

$$P_n(x) = n!\,E_n(1-x) .$$

5. On pose $F_n(x) = e^x\,E_n(-x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Prouver la relation

$$F_n(x) = 1 + \int_0^x e^t\,\frac{(-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t .$$

En déduire les variations et les limites à l'infini de la fonction F_n (discuter selon la parité de n). Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation $P_n(x) = 0$?

PROBLÈME 1 : Méthode de Newton

Soit $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, telle que

$$f(a) < 0 < f(b) \quad ; \qquad f' > 0 \text{ sur } I \quad ; \qquad f'' > 0 \text{ sur } I\,.$$

On pose $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} f'(x)$ et $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$ (on a $m_1 > 0$ et $M_2 > 0$).
Soit Γ la courbe représentative de f.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution ω dans l'intervalle $]a, b[$.

On définit une suite (x_n) par : $x_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection avec l'axe Ox de la tangente à Γ au point d'abscisse x_n.

2. Faire un schéma. Montrer que l'on peut écrire $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, où φ est une fonction que l'on explicitera à l'aide de f.

3. Montrer que l'intervalle $]\omega, b]$ est stable par φ. En déduire que $\omega < x_{n+1} < x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \omega$.

4. Montrer la relation $x_{n+1} - \omega = -\dfrac{f(x_n) + (\omega - x_n)\, f'(x_n)}{f'(x_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \le x_{n+1} - \omega \le \frac{M_2}{2m_1}\,(x_n - \omega)^2\,.$$

5. Montrer qu'il existe un entier N tel que $\dfrac{M_2}{2m_1}\,(x_N - \omega) < 1$. En déduire l'existence de deux constantes $c > 0$ et $k \in\,]0, 1[$ telles que l'on ait

$$0 \le x_n - \omega \le c \cdot k^{2^n} \qquad \text{pour } n \text{ assez grand}\,.$$

6. Montrer que la suite $(x_n - \omega)$ est négligeable devant toute suite géométrique (la convergence de la méthode est donc très rapide).

7. *Exemple d'estimation du temps de calcul.* Supposons que l'on ait obtenu la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \le x_n - \omega \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\,.$$

Combien d'itérations sont nécessaires pour calculer ω à 10^{-10} près ? à 10^{-100} près ? à 10^{-1000} près ?

FIN

****

CORRIGÉ

****

EXERCICE 1 :

1. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$, sa dérivée seconde est continue sur le segment $[a, b]$, de même que la fonction $|f''|$ qui admet donc un maximum sur ce segment.

Cherchons φ sous la forme $\varphi(t) = \alpha t + \beta$. Les conditions $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$ conduisent au système $\begin{cases} a \ \ \alpha \ +\beta \ = \ f(a) \\ b \ \ \alpha \ +\beta \ = \ f(b) \end{cases}$, qui admet pour solution unique le couple (α, β) avec $\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (*c'est le coefficient directeur de la sécante (AB) si l'on note A et B les points d'abscisses respectives a et b sur la courbe représentative de f*) et $\beta = \dfrac{b\, f(a) - a\, f(b)}{b - a}$.
Ainsi,

$$\varphi(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, t + \frac{b\, f(a) - a\, f(b)}{b - a} = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a)\ .$$

La deuxième expression de $\varphi(t)$ montre que c'est la droite de coefficient directeur $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ passant par le point $A\big(a, f(a)\big)$.

2. La condition $\psi_\lambda(x) = 0$ donne $\lambda = \dfrac{\varphi(x) - f(x)}{(x - a)(b - x)}$. Si λ est ainsi choisi, la fonction ψ_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a, b]$ (c'est la différence de f et d'une fonction polynôme du second degré) et vérifie $\psi_\lambda(a) = \psi_\lambda(x) = \psi_\lambda(b) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle, il existe au moins un point d dans l'intervalle $]a, x[$ tel que $\psi'_\lambda(d) = 0$ et un point e dans $]x, b[$ tel que $\psi'_\lambda(e) = 0$. Comme $d < e$, on peut de nouveau appliquer le théorème de Rolle à la fonction dérivée ψ'_λ : il existe $c \in]d, e[$ tel que $\psi''_\lambda(c) = 0$.

3. Soit $x \in]a, b[$ fixé. Choisissons alors λ comme dans la question précédente. Explicitons la dérivée seconde de ψ_λ :

$$\forall t \in [a, b] \qquad \psi''_\lambda(t) = f''(t) - 2\lambda = f''(t) - 2\frac{\varphi(x) - f(x)}{(x - a)(b - x)}\ .$$

La condition $\psi''_\lambda(c) = 0$ s'écrit alors $\varphi(x) - f(x) = \dfrac{f''(c)}{2}(x - a)(b - x)$. On a donc la majoration

$$\forall x \in]a, b[\qquad |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{M}{2}(x - a)(b - x)\ ,$$

majoration qui reste évidemment valable pour $x = a$ et $x = b$.

4. On a

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b \varphi(x)\,dx\right|\leq\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx\leq\frac{M}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx\,.$$

Un petit calcul, que je laisse volontiers au lecteur, donne $\displaystyle\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx=\frac{(b-a)^3}{6}$, d'où la conclusion.

Les résultats obtenus dans cet exercice seront prochainement repris en cours pour majorer l'erreur commise lors d'un calcul approché d'intégrale par la méthode des trapèzes.

EXERCICE 2 :

- La fonction th, définie sur $\mathbb{R}$, prend ses valeurs dans $]-1,1[$, intervalle sur lequel la fonction arccos est définie et dérivable. La fonction composée $f=\arccos\circ\,\mathrm{th}$ est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x)=(\mathrm{th})'(x)\cdot(\arccos)'(\mathrm{th}\,x)=(1-\mathrm{th}^2\,x)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\,x}}=-\sqrt{1-\mathrm{th}^2\,x}=-\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}$$

car, pour tout réel x, on a $1-\mathrm{th}^2\,x=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}$ et $\mathrm{ch}\,x>0$.

- La fonction $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1]$; la fonction arcsin est définie et continue sur cet intervalle, mais n'est pas dérivable au point 1. La fonction g est donc continue sur $\mathbb{R}$, mais on ne peut utiliser la formule de dérivation d'une fonction composée qu'en un point x pour lequel $\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}\neq 1$, c'est-à-dire pour $x\neq 0$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a

$$g'(x)=-\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^2\,x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}}}=-\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^2\,x}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,x}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\,x-1}}=-\frac{\mathrm{sh}\,x}{|\,\mathrm{sh}\,x|}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}=-\frac{\mathrm{sgn}(x)}{\mathrm{ch}\,x}$$

car $\mathrm{ch}^2\,x-1=\mathrm{sh}^2\,x$ et, pour tout réel x, $\mathrm{sh}\,x$ est du signe de x.

- *Remarque.* On voit que $\lim\limits_{x\to 0^-} g'(x)=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x)=1$, donc la fonction g n'est effectivement pas dérivable en zéro, mais admet en ce point une dérivée à gauche et une dérivée à droite distinctes : $g'_g(0)=-1$ et $g'_d(0)=1$. Notons toutefois que les deux fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions f et g sont dérivables et ont la même dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$, donc diffèrent d'une constante ; comme elles ont la même limite en $+\infty$, à savoir $\arccos(1)=\arcsin(0)=0$, on en déduit qu'elles coïncident sur cet intervalle ;
- Les fonctions f et g sont dérivables et ont des dérivées opposées sur $\mathbb{R}_-^*$, donc leur somme $f+g$ est constante sur cet intervalle et vaut

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+\lim_{x\to-\infty} g(x)=\arccos(-1)+\arcsin(0)=\pi\,.$$

Bilan : on a $\begin{cases} g(x)=\pi-f(x) & \text{sur } \mathbb{R}_- \\ g(x)=f(x) & \text{sur } \mathbb{R}_+ \end{cases}$ (*les deux expressions coïncidant pour* $x=0$).

PROBLÈME :

1. $f'(x) = \dfrac{(2-x)\,e^x}{(x-1)^2}$ est du signe de $2-x$. La fonction f est donc strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,2]$, et strictement décroissante sur $[2,+\infty[$. Les limites se laissent calculer tranquillement, sans opposer de résistance :

$$\lim_{-\infty} f = 0 \quad ; \quad \lim_{1^-} f = +\infty \quad ; \quad \lim_{1^+} f = -\infty \quad ; \quad \lim_{+\infty} f = -\infty\ .$$

L'axe Ox est donc asymptote à la courbe lorsque x tend vers $-\infty$.

2. Il s'agit d'une assertion $(\mathcal{A}_n)$ dépendant d'un entier naturel n, montrons-la par récurrence :
- • c'est vrai pour $n=0$ avec $P_0(x)=1$;
- (• c'est vrai aussi pour $n=1$ avec $P_1(x)=-x+2$) ;
- • soit $n\in\mathbb{N}$, si l'assertion est vraie au rang n alors, en dérivant l'expression de $f^{(n)}(x)$, on obtient, après réduction (sur feu doux) :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{e^x}{(1-x)^{n+2}}\ \left[(n+2-x)\,P_n(x) + (1-x)\,P'_n(x)\right]\ .$$

L'expression entre crochets étant une fonction polynôme de x, l'assertion est prouvée par récurrence.

En décalant les indices dans la relation ci-dessus, on obtient la relation permettant le calcul de proche en proche des polynômes P_n :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad P_n(x) = (n+1-x)\,P_{n-1}(x) + (1-x)\,P'_{n-1}(x) \qquad \textbf{(*)}\ .$$

3. En appliquant la relation ci-dessus pour $x=1$, on obtient $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad P_n(1) = n\,P_{n-1}(1)$. Comme $P_0(1)=1$, on en déduit $P_n(1)=n!$ (sans aspirine).

Il peut sembler raisonnable de conjecturer que le terme dominant du polynôme P_n est $(-1)^n x^n$: c'est vrai pour $n=0$ et pour $n=1$. Si, pour un $n\in\mathbb{N}^*$ donné, c'est vrai au rang $n-1$ (c'est-à-dire P_{n-1} a pour terme dominant $(-1)^{n-1}\,x^{n-1}$), alors, dans la relation **(*)** ci-dessus, le terme $(n+1-x)\,P_{n-1}(x)$ a pour terme dominant $-x\cdot(-1)^{n-1}x^{n-1} = (-1)^n\,x^n$; quant au terme $(1-x)\,P'_{n-1}(x)$, étant de degré seulement $n-1$, il ne fait pas le poids et se laisse donc gentiment négliger, ce qui achève la récurrence.

4. En utilisant la formule de Leibniz, dérivons n fois la relation $e^x = (1-x)\,f(x)$. Cela donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(1-x)\cdot f^{(n-k)}(x) = (1-x)\,f^{(n)}(x) - n\,f^{(n-1)}(x)\ .$$

La somme ne comporte en fait que deux termes car $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(1-x)$ est nul pour $k\geq 2$. On peut réécrire cela sous la forme

$$e^x = \frac{e^x}{(1-x)^n}\,P_n(x) - n\,\frac{e^x}{(1-x)^n}\,P_{n-1}(x)\ ,$$

soit encore $P_n(x) = n\,P_{n-1}(x) + (1-x)^n$. On a donc aussi $P_{n-1}(x) = (n-1)\,P_{n-2}(x) + (1-x)^{n-1}$ puis, en réinjectant

$$P_n(x) = n(n-1)\,P_{n-2}(x) + n(1-x)^{n-1} + (1-x)^n\ .$$

On écrit encore une étape ou deux au brouillon et on est alors mûr pour conjecturer que, pour k de 1 à n,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= n(n-1)\cdots(n-k+1)P_{n-k}(x) + n(n-1)\cdots(n-k+2)(1-x)^{n-k+1} + \cdots\cdots + (1-x)^n \\ &= n(n-1)\cdots(n-k+1)P_{n-k}(x) + \sum_{j=n-k+1}^{n} \frac{n!}{j!}(1-x)^j \ , \end{aligned}$$

ce que l'on peut vérifier par récurrence. Pour $k=n$, tenant compte de $P_0(x) = 1 = (1-x)^0$, on a donc

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!}(1-x)^j = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-x)^k}{k!} = n!\, E_n(1-x) \ .$$

5. Démontrons la relation proposée par récurrence sur n :

- pour $n=0$, $1 + \displaystyle\int_0^x e^t\, \mathrm{d}t = 1 + (e^x - 1) = e^x = e^x\, E_0(-x) = F_0(x)$: c'est vrai.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ donné, supposons la relation vraie au rang n. On effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^x e^t \frac{(-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, \mathrm{d}t &= 1 + \left[(-t)^{n+1} \frac{e^t}{(n+1)!}\right]_0^x + \frac{1}{n!} \int_0^x e^t\, (-t)^n\, \mathrm{d}t \\ &= 1 + \int_0^x e^t \frac{(-t)^n}{n!}\, \mathrm{d}t + e^x \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= F_n(x) + e^x \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (\textit{hypothèse de récurrence}) \\ &= e^x \left[E_n(-x) + \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right] = e^x\, E_{n+1}(-x) = F_{n+1}(x) \ . \end{aligned}$$

La fonction F_n est donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^x \dfrac{(-x)^n}{n!}$, soit $F_n'(x) = e^x \dfrac{(-x)^n}{n!}$. Remarquons enfin la relation $P_n(x) = n!\, e^{-x}\, F(x-1)$ ou encore $F_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} P_n(x+1)$. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ ne s'annulant pas, le nombre de zéros réels de la fonction polynôme P_n est égal au nombre de solutions réelles de l'équation $F_n(x) = 0$.

Notons aussi que, le terme dominant du polynôme P_n (ou du polynôme "translaté" $P_n(x+1)$, c'est le même) étant $(-1)^n\, x^n$, on a $P_n(x+1) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} (-1)^n\, x^n$, par conséquent $F_n(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n!}\, x^n\, e^x$.

On en déduit la discussion suivante :

- si n est pair, alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad F_n'(x) \geq 0$ (cette dérivée étant nulle seulement pour $x=0$) : la fonction F_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Des équivalents écrits ci-dessus, on déduit $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F_n(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = +\infty$: la fonction F_n réalise alors une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule donc pas ; le polynôme P_n n'a pas de racine réelle.

- si n est impair, la dérivée $F_n'(x)$ est du signe de $-x$, la fonction F_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) = -\infty$. En faisant un tableau de variations, on voit que la fonction F_n s'annule en un point et un seul (appartenant à $\mathbb{R}_+^*$), donc le polynôme P_n a une unique racine réelle.

PROBLÈME 1 : Méthode de Newton

1. f est continue et strictement croissante sur $]a, b[$, donc réalise une bijection de cet intervalle sur son image. Or, $0 \in f\big(]a, b[\big) = \big]f(a), f(b)\big[$, donc $\exists! \omega \in]a, b[\quad f(\omega) = 0$.

2. La tangente à Γ au point d'abscisse x_n admet pour équation $y = f'(x_n)\,(x - x_n) + f(x_n)$. Elle rencontre Ox au point d'abscisse $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. On posera donc $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

3. Pour tout $x \in]\omega, b]$, $\varphi(x) < x$ car $\dfrac{f(x)}{f'(x)} > 0$.

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\omega, b]$ avec $\varphi' = \dfrac{f f''}{f'^2}$. On a $\varphi' > 0$ sur $]\omega, b]$, donc φ est strictement croissante sur $[\omega, b]$ et, pour tout $x \in]\omega, b]$, $\omega = \varphi(\omega) < \varphi(x) < x \leq b$, donc l'intervalle $]\omega, b]$ est stable par φ.

La suite (x_n) est donc décroissante strictement et à valeurs dans l'intervalle $]\omega, b]$ (*cf.* études de suites récurrentes $x_{n+1} = \varphi(x_n)$). On en déduit $\omega < x_{n+1} < x_n$ pour tout n.

La suite (x_n) est décroissante et minorée (par ω), donc elle converge. Sa limite est un réel $l \in [\omega, b]$ tel que $\varphi(l) = l$, c'est-à-dire $f(l) = 0$: c'est donc ω.

4. On a

$$x_{n+1} - \omega = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \omega = \frac{(x_n - \omega)\,f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{f(x_n) + (\omega - x_n)\,f'(x_n)}{f'(x_n)}\ .$$

On sait que $x_{n+1} - \omega > 0$ (question **3.**). Par ailleurs, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne

$$\Big|f(\omega) - \Big(f(x_n) + (x_n - \omega)\,f'(x_n)\Big)\Big| \leq \frac{M_2}{2!}\,|x_n - \omega|^2\ .$$

Tenant compte de $f(\omega) = 0$ et de la minoration du dénominateur positif $f'(x_n)$ par m_1, on obtient l'encadrement voulu.

5. Posons $M = \dfrac{M_2}{2m_1}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n - \omega) = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $M(x_N - \omega) < 1$. Pour tout $n > N$, nous pouvons écrire

$$\begin{array}{rcl}
|x_n - \omega| & \leq & M|x_{n-1} - \omega|^2 \\
|x_{n-1} - \omega|^2 & \leq & M^2|x_{n-2} - \omega|^4 \\
 & & \dots \\
|x_{n-k} - \omega|^{2^k} & \leq & M^{2^k}|x_{n-k-1} - \omega|^{2^{k+1}} \\
 & & \dots \\
|x_{N+1} - \omega|^{2^{n-N-1}} & \leq & M^{2^{n-N-1}}|x_N - \omega|^{2^{n-N}}.
\end{array}$$

Par substitutions successives, nous obtenons

$$|x_n - \omega| \leq M^{1+2+2^2+\dots+2^{n-N-1}}|x_N - \omega|^{2^{n-N}}$$

c'est-à-dire

$$|x_n - \omega| \leq M^{2^{n-N}-1}|x_N - \omega|^{2^{n-N}},$$

soit (puisqu'on sait que $x_n > \omega$) : $0 \leq x_n - \omega \leq c \cdot k^{2^n}$ pour tout $n \geq N$, en posant $c = \dfrac{1}{M}$ et $k = \big(M(x_N - \omega)\big)^{2^{-N}}$ (le choix de N garantit bien que $k \in]0, 1[$).

6. Soit $q \in]0,1[$; on a $\ln\left(\dfrac{c\cdot k^{2^n}}{q^n}\right) = \ln c + 2^n \ln k - n \ln q \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n \ln k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c\cdot k^{2^n}}{q^n} = 0$ et $x_n - \omega = o(q^n)$.

7. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n} \leq 10^{-10} \iff -2^n \ln 2 \leq -10 \ln 10 \iff n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{10 \ln 10}{\ln 2}\right)}{\ln 2} \simeq 5,06$, donc 6 itérations suffisent pour une précision de 10^{-10}. Des calculs analogues conduisent à 9 et 12 itérations respectivement pour des précisions de 10^{-100} et 10^{-1000}.