

Préparation DS N°4

Fonctions Réelles

Problème 1 –

On note \mathcal{E} l'ensemble des fonctions f continues sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

1. Soit $f \in \mathcal{E}$.
 - a. Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
 - b. Démontrer que la fonction f est impaire.
2. On suppose que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
 - a. Montrer que f est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle $xy' - y = kx$ où k est une constante dépendant de f que l'on précisera.
 - b. En déduire $f(x)$ en fonction de k pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. On note φ l'unique élément de \mathcal{E} dérivable sur \mathbb{R}_+^* vérifiant $\varphi'(1) = 1$.
 - a. φ est-elle dérivable en 0 ?
 - b. Déterminer les variations et les limites de φ en $+\infty$ et $-\infty$ puis tracer son graphe.
4. On considère $f \in \mathcal{E}$ que l'on suppose seulement continue sur \mathbb{R} . On note alors F l'unique primitive de f s'annulant en 0.
 - a. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(xy) = x^2F(y) + \frac{xy^2}{2}f(x)$.
 - b. En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
 - c. Déterminer l'ensemble \mathcal{E} .

EXERCICE 1.

Toutes les fonctions entrant en jeu dans cet exercice sont à valeurs réelles.

1. On souhaite résoudre sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0$$

- a. Soit z une fonction deux fois dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. On pose $\varphi(t) = \cos(t)z(t)$ pour tout $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Exprimer $\varphi''(t)$ en fonction de $z(t)$, $z'(t)$ et $z''(t)$ pour tout $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
- b. En déduire les solutions de (E).

2. On souhaite maintenant résoudre sur $] -1, 1[$ l'équation différentielle suivante :

$$(F) : (1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$$

- a. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $] -1, 1[$. On pose $z(t) = y(\sin(t))$ pour $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Exprimer $y(x)$, $y'(x)$ et $y''(x)$ en fonction de $z(\arcsin x)$, $z'(\arcsin x)$ et $z''(\arcsin x)$ pour tout $x \in] -1, 1[$.
- b. En déduire que y est solution de (F) sur $] -1, 1[$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle que l'on précisera. En déduire les solutions de (F).

3. Soit f une solution de (F) sur $] -1, 1[$.

- a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in] -1, 1[, (1 - x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n + 3)xf^{(n+1)}(x) - (n + 1)^2f^{(n)}(x) = 0$$

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n à l'aide de la question précédente.
- c. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p} = \frac{((2p)!)^2}{2^{2p}(p!)^2} a_0 \qquad a_{2p+1} = 2^{2p}(p!)^2 a_1$$

4. On se propose de déterminer plusieurs développements limités à l'aide de la question 3.

- a. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ . Rappeler la formule de Taylor-Young appliquée à f en 0 à un ordre $n \in \mathbb{N}$.
- b. Soit $g : x \in] -1, 1[\mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. Que valent $g(0)$ et $g'(0)$? En remarquant que g est solution de (F), donner le développement limité à l'ordre $2n + 1$ en 0 de g .
- c. Soit $h : x \in] -1, 1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Que valent $h(0)$ et $h'(0)$? En remarquant que h est solution de (F), donner le développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de h .
- d. Soit $k : x \in] -1, 1[\mapsto \arcsin x$. Déduire de la question 4.c le développement limité à l'ordre $2n + 1$ en 0 de k .

5. En remarquant que $g = hk$ et en considérant le coefficient de x^{2n+1} dans le développement limité de cette fonction, montrer que

$$\sum_{p=0}^n \frac{1}{2p+1} \binom{2p}{p} \binom{2(n-p)}{n-p} = \frac{2^{4n}}{(n+1) \binom{2n+1}{n}}$$

CORRIGE

Problème 1 – Équation fonctionnelle

1. a. En choisissant $x = y = 0$ dans la relation de l'énoncé, on obtient $f(0) = 0$. En choisissant $x = y = 1$, on obtient $f(1) = 0$. Enfin, en choisissant $x = y = -1$, on obtient $f(-1) = 0$.
- b. On se donne $x \in \mathbb{R}$. En choisissant $y = -1$, on obtient $f(-x) = -f(x)$ puisque $f(-1) = 0$. f est donc bien impaire.
2. a. On dérive la relation de l'énoncé par rapport à y :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x f'(xy) = x f'(y) + f(x)$$

On fixe alors $y = 1$ de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x f'(x) - f(x) = x f'(1)$$

Ainsi f est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle $x y' - y = kx$ avec $k = f'(1)$.

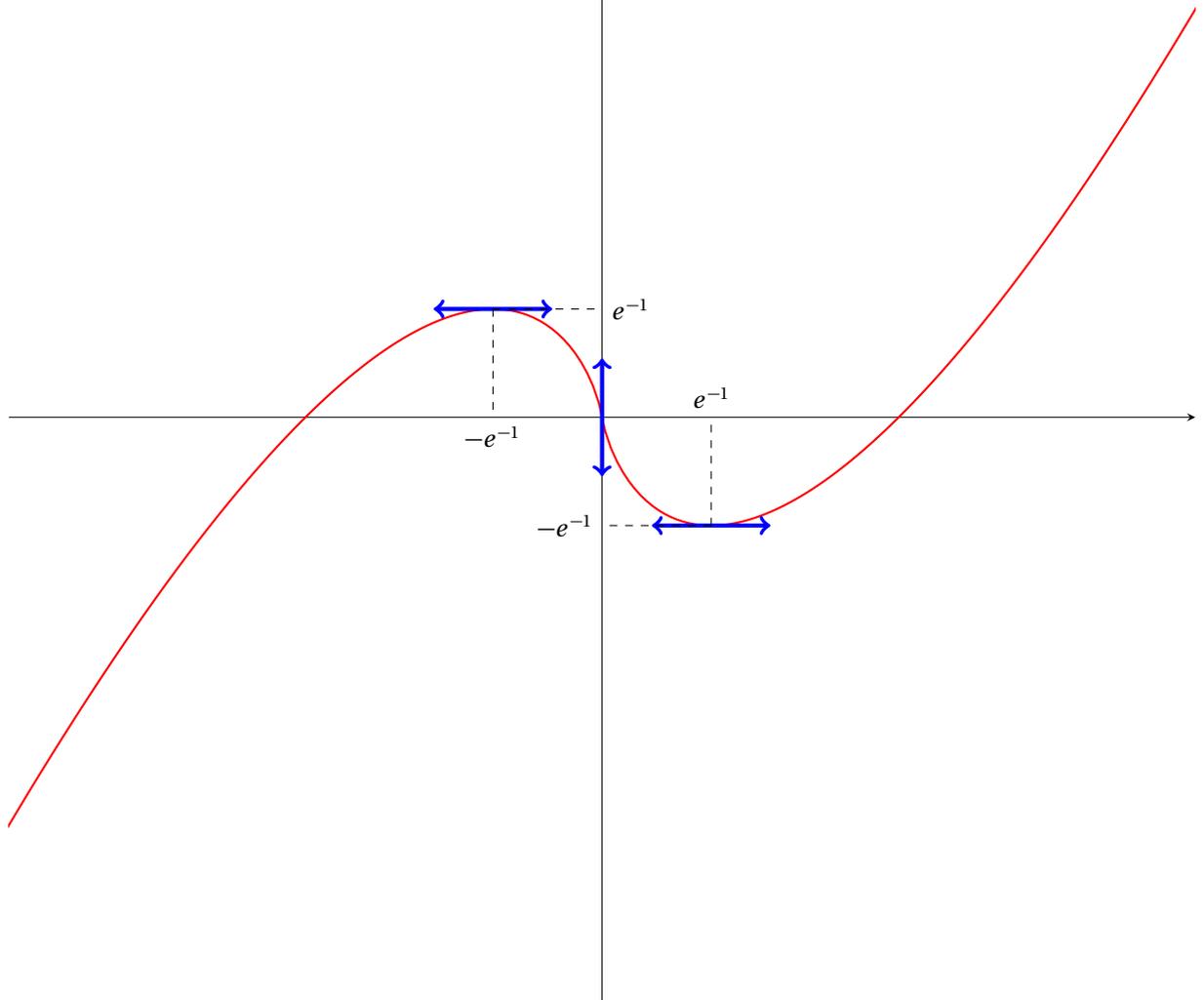
- b. Les solutions sur \mathbb{R}_+^* de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, on trouve que $x \mapsto kx \ln(x)$ est solution particulière. Les solutions sur \mathbb{R}_+^* de l'équation avec second membre sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda x + kx \ln(x)$.
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x + kx \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Or on sait que $f(1) = 0$, ce qui impose $\lambda = 0$. On en déduit que $f(x) = kx \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est impaire, $f(x) = -f(-x) = kx \ln(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$. Enfin, f est continue en 0 donc $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} kx \ln(x) = 0$ par croissances comparées.

3. a. La question précédente montre que $\varphi(x) = \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x \ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$

$\ln x$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$, ce qui prouve que f n'est pas dérivable en 0.

REMARQUE. On prouve de même que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$. On peut en déduire que la courbe de f admet une tangente verticale en son point d'abscisse 0. ■

- b. On se contente d'étudier f sur \mathbb{R}_+^* puisque f est impaire. On trouve que $f'(x) = \ln(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]0, 1/e]$ et strictement croissante sur $[1/e, +\infty[$. Par opérations sur les limites, $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
Puisque f est impaire, f est strictement croissante sur $[-1/e, 0[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, 1/e]$ et $\lim_{-\infty} f = -\infty$.



4. a. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
On fixe alors $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(xt) = xf(t) + tf(x)$$

On se donne maintenant $y \in \mathbb{R}$ et on intègre la relation précédente entre 0 et y . Ainsi

$$\int_0^y f(xt) dt = xF(y) + \frac{y^2}{2} f(x)$$

On multiplie cette relation par x :

$$\int_0^y xf(xt) dt = x^2F(y) + \frac{xy^2}{2} f(x)$$

En effectuant le changement de variable $u = xt$ dans la première intégrale, on obtient

$$F(xy) = x^2F(y) + \frac{xy^2}{2} f(x)$$

- b. En choisissant $y = 1$ dans la relation précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{2}{x} (F(x) - x^2F(1))$$

Or F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que primitive. Par opérations, f est donc elle-même dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

- c. D'après la question .2, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = kx \ln|x|$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Réciproquement, on vérifie aisément qu'une telle fonction est continue sur \mathbb{R} (seule la continuité en 0 pose éventuellement problème mais $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| = 0$). On vérifie également que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

quitte à distinguer les cas où $x = 0$ ou $y = 0$.

On a donc démontré que $\mathcal{E} = \text{vect}(\varphi)$.

SOLUTION 1.

1. a. φ est deux fois dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur cet intervalle et pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\varphi''(t) = \cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t)$$

- b. D'après la question précédente, z est solution de (E) si et seulement si φ'' est nulle sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Or φ'' est nulle sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(t) = \lambda t + \mu$ pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On en déduit que les solutions de (E) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sont les fonctions

$$t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{\lambda t + \mu}{\cos t} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

2. a. Puisque $z(t) = y(\sin t)$, pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $y(x) = z(\arcsin x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$. On en déduit que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$y'(x) = \frac{z'(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} \qquad y''(x) = \frac{z''(\arcsin x)}{1-x^2} + \frac{xz'(\arcsin x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- b. y est solution de (F) si et seulement si

$$\forall x \in]-1, 1[, (1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$$

ce qui équivaut d'après la question précédente à

$$\forall x \in]-1, 1[, z''(\arcsin x) - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}z'(\arcsin x) - z(\arcsin x) = 0$$

Puisque \sin prend toutes les valeurs dans $]-1, 1[$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ceci équivaut encore à

$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, z''(\arcsin(\sin t)) - \frac{2\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}z'(\arcsin(\sin t)) - z(\arcsin(\sin t)) = 0$$

Or pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ car \cos est positive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\arcsin(\sin t) = t$. Finalement, y est solution de (F) si et seulement si

$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, z''(t) - \frac{2\sin t}{\cos t}z'(t) - z(t) = 0$$

autrement dit, si et seulement si z est solution de (E).

Les solutions de (E) étant les fonctions

$$t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{\lambda t + \mu}{\cos t} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

celles de (F) sont les fonctions

$$x \in]-1, 1[\mapsto \frac{\lambda \arcsin x + \mu}{\cos(\arcsin x)} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

ou encore les fonctions

$$x \in]-1, 1[\mapsto \frac{\lambda \arcsin x + \mu}{\sqrt{1-x^2}} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

3. a. Notons HR(n) l'hypothèse de récurrence suivante

$$\forall x \in]-1, 1[, (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2f^{(n)}(x) = 0$$

HR(0) est vraie puisque f est solution de (F). Supposons que HR(n) soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors en dérivant (ceci est licite car les fonctions en jeu sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$), on obtient

$$\forall x \in]-1, 1[, (1-x^2)f^{(n+3)}(x) - 2xf^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+2)}(x) - (2n+3)f^{(n+1)}(x) - (n+1)^2f^{(n+1)}(x) = 0$$

ou encore

$$\forall x \in]-1, 1[, (1-x^2)f^{(n+3)}(x) - (2n+5)xf^{(n+2)}(x) - (n+2)^2f^{(n+1)}(x) = 0$$

puisque $(n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$.

Par récurrence, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

REMARQUE. On peut prouver directement la relation demandée sans récurrence à l'aide de la formule de Leibniz en dérivant n fois la relation

$$\forall x \in]-1, 1[, (1-x^2)f''(x) - 3xf'(x) - f(x) = 0$$

■

- b. En évaluant la relation de la question précédente en $x = 0$, on obtient $a_{n+2} = (n+1)^2 a_n$.
c. Récurrences sans aucune difficulté.

4. a. C'est du cours

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

- b. g est bien solution de (F) (prendre $\lambda = 1$ et $\mu = 0$ dans la solution générale). On a évidemment $g(0) = 0$. De plus, $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ de sorte que $g'(0) = 1$. En reprenant les notations de la question précédente, $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p} = 0 \qquad a_{2p+1} = 2^{2p} (p!)^2$$

En appliquant la formule de Taylor-Young à g en 0 à l'ordre $2n+1$ (ceci est licite puisque g est de classe \mathcal{C}^∞ d'après la question ??), on a donc

$$g(x) = \sum_{p=0}^n \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$$

- c. h est bien solution de (F) (prendre $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ dans la solution générale). On a évidemment $h(0) = 1$. De plus, $h(x) = 1 + o(x)$ de sorte que $h'(0) = 0$. En reprenant les notations de la question précédente, $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p} = \frac{((2p)!)^2}{2^{2p} (p!)^2} \qquad a_{2p+1} = 0$$

En appliquant la formule de Taylor-Young à h en 0 à l'ordre $2n$ (ceci est licite puisque h est de classe \mathcal{C}^∞ d'après la question ??), on a donc

$$h(x) = \sum_{p=0}^n \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} x^{2p} + o(x^{2n})$$

ou encore

$$h(x) = \sum_{p=0}^n \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}} x^{2p} + o(x^{2n})$$

- d. Puisque k est une primitive de h sur $] -1, 1[$,

$$k(x) = k(0) + \sum_{p=0}^n \frac{\binom{2p}{p}}{(2p+1)2^{2p}} x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$$

et donc

$$k(x) = \sum_{p=0}^n \frac{\binom{2p}{p}}{(2p+1)2^{2p}} x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$$

5. Le coefficient de x^{2n+1} dans le développement limité de g en 0 est $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

D'autre part, dans le produit hk , un terme en x^{2n+1} est obtenu comme le produit d'un terme en x^{2p+1} dans le développement limité de k en 0 et d'un terme en $x^{2(n-p)}$ dans le développement limité de h en 0. Par unicité du développement limité

$$\sum_{p=0}^n \frac{\binom{2p}{p}}{(2p+1)2^{2p}} \frac{\binom{2(n-p)}{n-p}}{2^{2(n-p)}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

ou encore

$$\sum_{p=0}^n \frac{1}{2p+1} \binom{2p}{p} \binom{2(n-p)}{n-p} = \frac{2^{4n}}{(n+1)\binom{2n+1}{n}}$$

2. On souhaite maintenant résoudre sur $] -1, 1[$ l'équation différentielle suivante :

$$(F) : (1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$$

a. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $] -1, 1[$. On pose $z(t) = y(\sin(t))$ pour $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Exprimer $y(x)$, $y'(x)$ et $y''(x)$ en fonction de $z(\arcsin x)$, $z'(\arcsin x)$ et $z''(\arcsin x)$ pour tout $x \in] -1, 1[$.

b. En déduire que y est solution de (F) sur $] -1, 1[$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle que l'on précisera. En déduire les solutions de (F).

3. Soit f une solution de (F) sur $] -1, 1[$.

a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in] -1, 1[, (1 - x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n + 3)xf^{(n+1)}(x) - (n + 1)^2 f^{(n)}(x) = 0$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n à l'aide de la question précédente.

c. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p} = \frac{((2p)!)^2}{2^{2p}(p!)^2} a_0 \qquad a_{2p+1} = 2^{2p}(p!)^2 a_1$$

4. On se propose de déterminer plusieurs développements limités à l'aide de la question 3.

a. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ . Rappeler la formule de Taylor-Young appliquée à f en 0 à un ordre $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $g : x \in] -1, 1[\mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. Que valent $g(0)$ et $g'(0)$? En remarquant que g est solution de (F), donner le développement limité à l'ordre $2n + 1$ en 0 de g .

c. Soit $h : x \in] -1, 1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Que valent $h(0)$ et $h'(0)$? En remarquant que h est solution de (F), donner le développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de h .

d. Soit $k : x \in] -1, 1[\mapsto \arcsin x$. Déduire de la question 4.c le développement limité à l'ordre $2n + 1$ en 0 de k .

5. En remarquant que $g = hk$ et en considérant le coefficient de x^{2n+1} dans le développement limité de cette fonction, montrer que

$$\sum_{p=0}^n \frac{1}{2p+1} \binom{2p}{p} \binom{2(n-p)}{n-p} = \frac{2^{4n}}{(n+1) \binom{2n+1}{n}}$$