Devoir Surveillé N°4

Fonctions Réelles

Durée : 4 heures

I Exercices

Exercice 1 (Questions en vrac) Les questions sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\sqrt{2+3x}$.

2. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

- **(a)** Calculer le développement limité en 1 à l'ordre 2 de f.
- **(b)** En déduire l'allure locale de la fonction f au voisinage de 1 (faire un schéma).

3. On note φ la fonction φ définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$ pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$.
Démontrer que φ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 2 (Questions en vrac) Les questions sont indépendantes.

1. On considère l'application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x})$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Et en 1 ?

2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet une limite finie en $+\infty$.

- **(a)** Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
- **(b)** La fonction f admet-elle nécessairement un minimum ?

Exercice 3.

On se donne $p\in\mathbb{N}^*$ et on pose pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$S_n=\sum_{k=n}^{np}\operatorname{sh}\frac{1}{k}$$

On souhaite étudier la limite éventuelle de la suite (S_n).

1. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh} x$.

- **a.** Résoudre l'équation $2\operatorname{sh} x+1=0$. On notera α son unique solution que l'on exprimera à l'aide de la fonction ln.
- **b.** Déterminer une expression simple de $f(\alpha)$.
- **c.** Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On ne demande pas de préciser les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- **d.** En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$.

2. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $g(x)=e^{\operatorname{sh} x}-x-1$.

- **a.** Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- **b.** Justifier que g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g''(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ où g'' désigne la dérivée de g'.
- **c.** En déduire les variations de g' puis celle de g, et enfin que $g(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- **d.** Montrer que pour tout $x\in[0,1[$,

$$1+x\leqslant e^{\operatorname{sh} x}\leqslant\frac{1}{1-x}$$

3.

- **a.** Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Montrer que pour tout $k\in[\![n,np]\!]$,

$$\frac{k+1}{k}\leqslant e^{\operatorname{sh}\frac{1}{k}}\leqslant\frac{k}{k-1}$$

- **b.** En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$,

$$\frac{np+1}{n}\leqslant e^{S_n}\leqslant\frac{np}{n-1}$$

- **c.** Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 4.

On pose pour $x\in\mathbb{R}^*$,

$$f(x)=x\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Déterminer la parité de f.
2. Justifier que l'équation $\operatorname{th}(x)=\dfrac{1}{x}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera α cette unique solution.
3. Montrer que $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$.
4. Préciser les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. On justifiera ses réponses.
5. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$. On fera intervenir le réel α de la question **2**.
6. Montrer que la courbe de f admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.
7. Préciser la position de la courbe de f par rapport à son asymptote sur $\mathbb{R}_+^*$.
8. Tracer la courbe de f. On fera apparaître les différentes asymptotes ainsi que les tangentes horizontales. On donne $\dfrac{1}{\alpha}\approx 0,83$ et $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\approx 1,51$.

Problème 1 —

Partie I –

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone telle que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$$

On pose $c=f(1)$.

1. Déterminer $f(0)$ et montrer que $c\neq 0$. Dans la suite, on pose $g=\dfrac{1}{c}f$.
2. Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
$$g(x+y)=g(x)+g(y) \qquad \text{et} \qquad g(x-y)=g(x)-g(y)$$
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g(n)=n$.
4. Montrer que g est une fonction impaire et en déduire que $g(n)=n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.
5. Montrer que pour tout $r\in\mathbb{Q}$, $g(r)=r$.
6. Montrer que g est strictement croissante.
7. Montrer que $g(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
On pourra raisonner par l'absurde et admettre qu'il existe toujours un rationnel strictement compris entre deux réels distincts.
8. En déduire f.

Partie II –

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On se propose de déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotones telles que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+f(y))=f(x)+y^n$$

Dans la suite, f désigne une telle application.

1. Justifier que f est injective.
2. Montrer que $f(0)=0$.
3. Montrer que $f(f(y))=y^n$ pour tout $y\in\mathbb{R}$.
4. On suppose $n=1$ dans cette question.
   - **a.** Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.
   - **b.** Conclure.
5. On suppose maintenant $n>1$.
   - **a.** Montrer que n ne peut être pair. On suppose donc n impair dans la suite.
   - **b.** Montrer que $f\circ f$ est bijective. En déduire que f l'est également.
   - **c.** Montrer que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
   - **d.** En déduire une contradiction.
   - **e.** Conclure.

II PROBLEME : autour de la propriété des valeurs intermédiaires

Les parties **3** et **4** de ce problème sont indépendantes et utilisent le théorème de Darboux démontré dans la partie **2**.

Dans tout le problème, I désignera un intervalle non réduit à un point.

Définition 1 *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ possède la propriété des valeurs intermerdiaires (en abrégé PVI) si pour tout élément a et b de I, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ (cela revient à dire que $f(I)$ l'image de I par f est encore un intervalle).*

1 Généralités

1. On considère la fonction ϕ définie sur $]0,1[$ par $\phi(x) = x$. Prolonger la fonction ϕ sur $[0,1]$ de sorte que $\phi([0,1]) = [0,1]$ et que ϕ soit discontinue en 0.

2. Donner une condition suffisante pour qu'une fonction possède la PVI. Cette condition est-elle nécessaire ?

3. Déterminer toutes les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant la PVI et ne prenant que des valeurs entières.

2 Le cas des fonctions dérivées : théorème de Darboux

Le but de cette partie est de démontrer le théorème de Darboux :

Théorème 2 (Darboux) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors, la fonction dérivée f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

4. Justifier que le théorème de Darboux est vrai pour une fonction f de classe C^1.

5. Donner sans démonstration un exemple de fonction dérivable sur $[0,+\infty[$ mais qui n'est pas de classe C^1.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On prend $a < b$ dans I tels que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

6. Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que $]a, a+r] \subset I$ et $\forall x \in]a, a+r],\ f(x) > f(a)$.

7. Justifier l'existence d'un maximum pour f sur $[a,b]$. En déduire avec soin qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

8. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ dérivable, $a < b$ dans I tel que $g'(a) < g'(b)$. Soit $k \in]g'(a), g'(b)[$. Démontrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que $g'(d) = k$, puis conclure.

3 Une application du théorème de Darboux

On désire déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lfloor f(x) \rfloor.$$

Soit f une solution du problème.

9. Démontrer que f est une fonction affine, donc de la forme $x \mapsto ax + b$.

10. Démontrer que $a = 0$.

11. Conclure.

4 Une autre application du théorème de Darboux

On désire déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables et ne s'annulant pas vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f''(x)| = f(x).$$

Soit f une solution du problème.

12. Démontrer que f'' est de signe constant sur $\mathbb{R}$.

13. Démontrer qu'une fonction vérifiant l'équation différentielle $y'' + y = 0$ s'annule forcément sur $\mathbb{R}$.

14. Démontrer que les solutions du problème sont les fonctions $x \mapsto A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-x}$ avec $A \geqslant 0,\ B \geqslant 0$ et $(A, B) \neq (0, 0)$.

BONNE CHANCE

CORRIGE

I Exercices

Exercice 1 (Questions en vrac) Les questions sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\sqrt{2+3x}$.

On a $\sqrt{2+3x} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{3x}{2}} = \sqrt{2}(1+\frac{3x}{2})^{\frac{1}{2}}$.

Pour x au voisinage de 0, on a $U = \frac{3x}{2}$ au voisinage de 0.

On a alors

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2+3x} & = & \sqrt{2}(1+U)^{\frac{1}{2}} \\ & = & \sqrt{2}(1+\frac{1}{2}U - \frac{1}{8}U^2 + o(U^2)) \\ & = & \sqrt{2}(1+\frac{1}{2}\frac{3}{2}x - \frac{1}{8}(\frac{3}{2}x)^2 + o(U^2)) \\ & = & \sqrt{2}(1+\frac{3}{4}x - \frac{9}{32}x^2 + o(x^2)) \end{array}$$

2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

(a) Calculer le développement limité en 1 à l'ordre 2 de f.
On se ramène au voisinage de 0, en posant $t = x-1$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\ln(x)}{x} & = & \ln(1+t) \times \dfrac{1}{1+t} = (t - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2))(1-t+o(t)) \\ & = & t - t^2 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2) = t - \dfrac{3t^2}{2} + o(t^2) \\ & = & (x-1) - \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \end{array}$$

(b) On en déduit qu'en 1, la tangente a pour équation $y = x-1$ et que la courbe est en dessous de cette tangente car

$$\frac{\ln(x)}{x} - (x-1) \sim_1 -\frac{3}{2}(x-1)^2 \leqslant 0.$$

3. On note φ la fonction φ définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$ pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

Démontrer que φ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Pour t au voisinage de 0, on a

$$\varphi(t) = \frac{t - \sin t}{t \sin t} = \frac{t - (t - \frac{t^3}{6} + o(t^3))}{t \sin t} = \frac{\frac{t^3}{6} + o(t^3)}{t \sin t} \sim \frac{\frac{t^3}{6}}{t \times t} = \frac{t}{6}.$$

On en déduit que $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = 0$.

Pour t au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}
\sin^2 t - t^2 \cos t &= (t - \frac{t^3}{6} + o(t^3))^2 - t^2(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)) \\
&= \left(t^2 - 2t \times \frac{t^3}{6} + o(t^4)\right) + \left(-t^2 + \frac{t^4}{2} + o(t^4)\right) \\
&= \frac{-t^4}{3} + \frac{t^4}{2} + o(t^4) \\
&= \frac{t^4}{6} + o(t^4)
\end{aligned}$$

Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\varphi'(t) = \frac{-t^2 \cos t + \sin^2 t}{t^2 \sin^2 t} \sim_{t \to 0} \frac{\frac{t^4}{6}}{t^4} = \frac{1}{6}.$$

La fonction φ de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ (somme et inverse) vérifie donc $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0} \varphi'(t) = \dfrac{1}{6}$. On en déduit par le théorème de prolongement de classe C^1, qu'on peut la prolonger sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en une fonction de classe C^1 en posant $\varphi(0) = 0$ et on a alors $\varphi'(0) = \frac{1}{6}$.

Exercice 2 (Questions en vrac) Les questions sont indépendantes.

1. On considère l'application $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x} \arcsin(\sqrt{x})$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Et en 1 ?

Pour $x \in]0, 1]$, on a $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{x} \arcsin(\sqrt{x})}{x} \sim \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{x} = 1$. Donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$.

Le taux d'accroissement en 1 est plus difficile à étudier. La fonction f est dérivable sur $]0, 1[$, et on a pour $x \in]0, 1[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \arcsin(\sqrt{x}) + \sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{1 - x}}.$$

On en déduit que f' tend vers $+\infty$ en 1, comme f est continue sur $[0, 1]$, on en déduit par le théorème de la limite de la dérivée que f n'est pas dérivable en 1.

2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet une limite finie en $+\infty$.

(a) Pour $\varepsilon = 1$, il existe $B > 0$ tel que pour $x \geqslant B$, $|f(x) - l| \leqslant 1$, donc $|f(x)| \leqslant |f(x) - l| + |l| \leqslant 1 + |l|$. De plus f est continue sur le segment $[0, B]$ donc y est bornée par un certain $M > 0$. Ainsi f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par $\max(M, 1 + |l|)$.

Solution 3.

1. **a.**

$$\begin{aligned} & 2\operatorname{sh} x+1=0 \\ \iff & \frac{e^x-e^{-x}}{2}+1=0 \\ \iff & e^x-e^{-x}+1=0 \\ \iff & e^{2x}+e^x-1=0 \\ \iff & (e^x)^2+e^x-1=0 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $X^2+X-1=0$ sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Puisque $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqslant 0$ et que l'exponentielle est strictement positive, l'unique solution de l'équation initiale est $\alpha=\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

b. En remarquant que $\operatorname{sh}\alpha=-\frac{1}{2}$

$$f(\alpha)=\operatorname{ch}^2\alpha+\operatorname{sh}\alpha=1+\operatorname{sh}^2\alpha+\operatorname{sh}\alpha=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

c. Comme ch est dérivable sur $\mathbb{R}$, ch^2 l'est aussi. De plus, sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f=\operatorname{ch}^2+\operatorname{sh}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=2\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x=\operatorname{ch}x(2\operatorname{sh}x+1)$$

La fonction sh étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

- $\forall x<\alpha,\ 2\operatorname{sh}x+1<0,$

- $\forall x > \alpha,\ 2\operatorname{sh} x + 1 > 0$.

Bien évidemment ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque. On obtient facilement la limite de f en $+\infty$ puisque $\lim_{+\infty} \operatorname{ch} = \lim_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty$. Pour déterminer la limite en $-\infty$, on peut remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \operatorname{ch}^2 x \left(1 + \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{th} = 1$ et $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{ch} = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} 1 + \frac{\operatorname{th}}{\operatorname{ch}} = 1$ puis $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. ■

d. Puisque f est décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha + \infty[$, $f(x) \geqslant f(\alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. On n'utilise en aucun cas la continuité de f ni un quelconque théorème des valeurs intermédiaires. ■

Puisque $f(\alpha) = \frac{3}{4} > 0$, on a a fortiori $f > 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent $x \mapsto e^{\operatorname{sh} x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque $x \mapsto x + 1$ est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$, g l'est également.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = e^{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch} x - 1$$

b. Comme dans la question **2.a**, $x \mapsto e^{\operatorname{sh} x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. ch est également dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g' l'est également.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g''(x) = e^{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch}^2 x + e^{\operatorname{sh} x} \operatorname{sh} x = e^{\operatorname{sh} x} f(x)$$

c. Puisque $f > 0$ sur $\mathbb{R}$, $g'' > 0$ sur $\mathbb{R}$. g' est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $g'(0) = 0$ donc $g'(x) < 0$ pour $x < 0$ et $g'(x) > 0$ pour $x > 0$. On en déduit que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0) = 0$, $g \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

d. Soit $x \in [0, 1[$. D'après la question **2.c**, $g(x) \geqslant 0$ et donc $e^{\operatorname{sh} x} \geqslant 1 + x$. Mais on a également $g(-x) \geqslant 0$ i.e. $e^{-\operatorname{sh} x} \geqslant 1 - x$ puisque sh est impaire. Or $1 - x > 0$, donc on obtient en passant à l'inverse

$$\frac{1}{1-x} \geqslant \frac{1}{e^{-\operatorname{sh} x}} = e^{\operatorname{sh} x}$$

Les deux inégalités obtenues nous donnent l'encadrement

$$1 + x \leqslant e^{\operatorname{sh} x} \leqslant \frac{1}{1-x}$$

a. Pour tout $k \in [\![n, np]\!]$,

$$0 \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$$

et a fortiori $\frac{1}{k} \in [0, 1[$. On peut donc utiliser la question **2.d** pour affirmer que pour tout $k \in [\![n, np]\!]$

$$1 + \frac{1}{k} \leqslant \exp\left(\operatorname{sh} \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{k}}$$

ou encore

$$\frac{k+1}{k} \leqslant \exp\left(\operatorname{sh} \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{k}{k-1}$$

b. Puisque l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$e^{S_n} = \prod_{k=n}^{np} \exp\left(\operatorname{sh}\frac{1}{k}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. D'après la question **2.b**, pour tout $k \in [\![n, np]\!]$,

$$\frac{k+1}{k} \leqslant e^{\operatorname{sh}\frac{1}{k}} \leqslant \frac{k}{k-1}$$

On peut multiplier membre à membre ces inégalités puisque tous les membres sont positifs de sorte que

$$\prod_{k=n}^{np} \frac{k+1}{k} \leqslant \prod_{k=n}^{np} \exp\left(\operatorname{sh}\frac{1}{k}\right) \leqslant \prod_{k=n}^{np} \frac{k}{k-1}$$

Le membre central n'est autre que e^{S_n} et par télescopage, le membre de gauche est $\frac{np+1}{n}$ tandis que celui de droite est $\frac{np}{n-1}$. On en déduit bien que

$$\frac{np+1}{n} \leqslant e^{S_n} \leqslant \frac{np}{n-1}$$

c. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{np+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{np}{n-1} = p$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{S_n} = p$. Par continuité de ln, (S_n) converge vers $\ln(p)$.

Solution 4.

1. Puisque ch est paire, f est impaire.

2. L'application $\varphi : x \mapsto \operatorname{th}(x) - \frac{1}{x}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (différence d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante). De plus, $\lim_{0^+} \varphi = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \varphi = 1$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, φ s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$. L'équation $\operatorname{th} x = \frac{1}{x}$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Par définition, $\operatorname{th}\alpha = 1/\alpha$. Par ailleurs, $f(1/\alpha) = \frac{\operatorname{ch}\alpha}{\alpha}$. Mais

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha} = 1 - \operatorname{th}^2\alpha = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}$$

Comme $\operatorname{ch}\alpha$ et α sont positifs,

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

Enfin

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

4. Tout d'abord, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(1/x) = \operatorname{ch}(0) = 1$ donc

$$\lim_{+\infty} f = +\infty$$

Ensuite, en posant $u = \frac{1}{x}$, $u \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch} u}{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^u}{u} + \frac{e^{-u}}{u}\right)$$

Par croissances comparées, $\lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ et par opérations, $\lim_{u\to+\infty} \frac{e^{-u}}{u} = 0$. Finalement, $\lim_{u\to+\infty} \frac{\operatorname{ch} u}{u} = +\infty$ et donc

$$\lim_{0^+} f = +\infty$$

5. f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (essentiellement car ch l'est sur $\mathbb{R}$) et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or on a vu que φ était strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\varphi(\alpha) = 0$ donc $\varphi(1/x) > 0$ pour $x < 1/\alpha$ et $\varphi(1/x) < 0$ pour $x > 1/\alpha$. Comme ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit le signe de f' sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc le tableau de variations suivant.

x	0		$1/\alpha$		$+\infty$
Signe de f'	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$	$\nearrow$	$+\infty$

6. Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x)}{x} = \operatorname{ch}(1/x)$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Par ailleurs,

$$f(x) - x = x\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)$$

Or, comme ch est dérivable en 0,

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{ch} u - 1}{u} = \operatorname{ch}'(0) = \operatorname{sh}(0) = 0$$

puis, en posant $u = 1/x$,

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) = 0$$

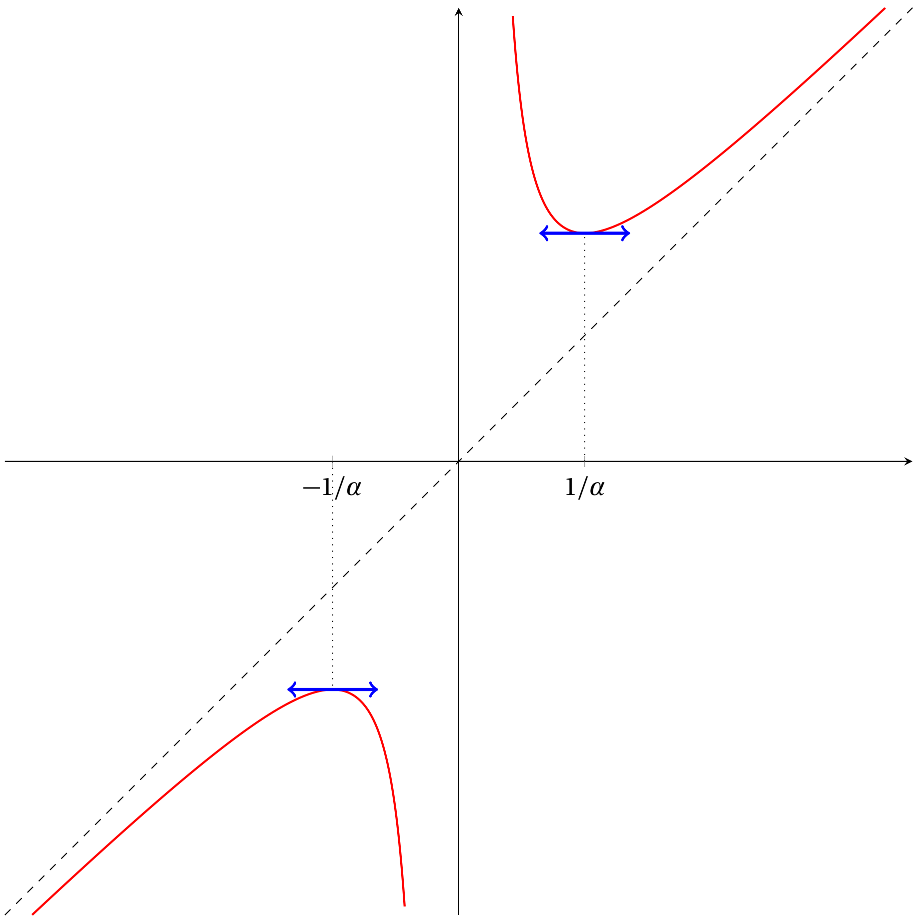
Ainsi $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$ de sorte que la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = x$.

7. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) - x = x\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)$$

Or $\operatorname{ch} u > 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$ donc $f(x) - x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. La courbe de f est donc au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. On utilise le fait que f est impaire : sa courbe est donc symétrique par rapport à l'origine.



Problème 1 — Équation fonctionnelle

Partie I –

1. D'après l'énoncé, $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ donc $f(0)=0$.
   Puisque f est strictement monotone, elle est injective donc $f(1)\neq f(0)=0$.

2. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$$g(x+y)=\frac{1}{c}f(x+y)=\frac{1}{c}f(x)+\frac{1}{c}f(y)=g(x)+g(y)$$
   On en déduit que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
$$g(x)=g(x-y+y)=g(x-y)+g(y)$$
   et donc que $g(x-y)=g(x)-g(y)$.

3. On sait que $g(0)=\frac{1}{c}f(0)=0$ et que $g(n+1)=g(n)+g(1)=g(n)+\frac{1}{c}f(1)=g(n)+1$. La suite de terme général $g(n)$ est donc arithmétique de raison 1 et de premier terme $g(0)=0$. On en déduit que $g(n)=n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$g(x)+g(-x)=g(x-x)=g(0)=0$$
   donc g est impaire.

5. Soit $r\in\mathbb{Q}$. La suite de terme général $g(nr)$ est arithmétique de premier terme $g(0)=0$ et de raison $g(r)$. On en déduit que $g(nr)=ng(r)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   Puisque $r\in\mathbb{Q}$, il existe $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que $r=\frac{p}{q}$. D'une part, $g(qr)=qg(r)$ et d'autre part, $g(qr)=g(p)=p$ puisque $p\in\mathbb{Z}$. Ainsi $qg(r)=p$ puis $g(r)=\frac{p}{q}=r$.

6. D'après l'énoncé, f est strictement monotone.
   Si f est strictement croissante $c=f(1)>f(0)=0$ donc $g=\frac{1}{c}f$ est strictement croissante.
   Si f est strictement décroissante $c=f(1)<f(0)=0$ donc $g=\frac{1}{c}f$ est strictement croissante.

7. Supposons qu'il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $g(x)\neq x$. Alors il existe un rationnel r strictement compris entre x et $g(x)$.
   Si $x<r<g(x)$, alors par stricte croissance de g, $g(x)<g(r)=r$, d'où une contradiction.
   Si $g(x)<r<x$, alors par stricte croissance de g, $g(x)>g(r)=r$, d'où une contradiction à nouveau.
   On en déduit que $g(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

8. On a montré que $g=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ donc $f=cg=c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Partie II –

1. f est injective car strictement monotone.

2. D'après l'énoncé, $f(f(0))=f(0+f(0))=f(0)+0^n=f(0)$. Or f est injective donc $f(0)=0$.

3. Pour tout $y\in\mathbb{R}$,
$$f(f(y))=f(0+f(y))=f(0)+y^n=y^n$$

4. **a.** Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Puisque $n=1$, $f(f(y))=y^n=y$. Ainsi
$$f(x+y)=f(x+f(f(y)))=f(x)+f(y)$$

b. La partie précédente montre qu'en posant $c = f(1)$, $f = c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. De plus, $1 = f(f(1)) = f(c) = c^2$ donc $c = \pm 1$. Ainsi $f = \pm\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
On vérifie aisément que, réciproquement, si $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ ou $f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, on a bien

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + f(y)) = f(x) + y$$

Dans le cas où $n = 1$, les applications recherchées sont donc exactement $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

5. **a.** Supposons n pair. Alors $f(f(1)) = 1^n = 1$ et $f(f(-1)) = (-1)^n = 1$ donc $f \circ f(1) = f \circ f(-1)$. Or f est injective donc $f \circ f$ l'est également. On en déduit une contradiction.

b. Puisque n est impair, le théorème de la bijection montre que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y^n \end{array}\right.$ est bijective. Or cette application n'est autre que $f \circ f$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors $f(f(x)) = f(f(y))$ puis $x = y$ par injectivité de $f \circ f$. Ainsi f est injective.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(f(x))$ par surjectivité de $f \circ f$. Ainsi $y \in \operatorname{Im} f$ et f est surjective.

c. Puisque f est bijective, on peut considérer la bijection réciproque f^{-1} de $\mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$f(x + y) = f(x + f(f^{-1}(y))) = f(x) + f^{-1}(y)^n$$

Or $f^{-1}(y)^n = f(f(f^{-1}(y))) = f(y)$ donc $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

d. D'après la partie précédente, $f = c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ en posant $c = f(1)$. On a donc $f(f(y)) = c^2 y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Or on sait également que $f(f(y)) = y^n$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On en déduit par exemple que $c^2 = y^{n-1}$ pour tout $y \neq 0$. Mais puisque $n > 1$, y^{n-1} prend une infinité de valeurs lorsque y décrit $\mathbb{R}^*$. Ceci est absurde.

e. Dans le cas où $n > 1$, il n'existe aucune application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + f(y)) = f(x) + y^n$$

II PROBLEME : autour de la propriété des valeurs intermédiaires

Les parties **3** et **4** de ce problème sont indépendantes et utilisent le théorème de Darboux démontré dans la partie **2**.

Dans tout le problème, I désignera un intervalle non réduit à un point.

Définition 1 *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ possède la propriété des valeurs intermerdiaires (en abrégé PVI) si pour tout élément a et b de I, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ (cela revient à dire que $f(I)$ l'image de I par f est encore un intervalle).*

1 Généralités

1. On considère la fonction ϕ définie sur $]0, 1[$ par $\phi(x) = x$. Prolonger ϕ sur $[0, 1]$ de sorte que $\phi([0, 1]) = [0, 1]$, mais que ϕ ne soit pas continue.

On pose $\phi(0) = 1$ et $\phi(1) = 0$. Ainsi tout élément de $[0, 1]$ admet un antécédent dans $[0, 1]$ et ϕ n'est pas continue en 0, ni en 1.

2. Donner une condition suffisante pour qu'une fonction possède la PVI. Cette condition est-elle nécessaire ?

Si f est continue sur I, alors f vérifie la PVI d'après le théorème des valeurs intermédiaires. D'après la question précédente, cette condition n'est pas nécessaire.

3. Déterminer toutes les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant la PVI et ne prenant que des valeurs entières.

Si f n'est pas constante, elle prend deux valeurs u et v, différentes, mais alors, elle doit prendre toutes les valeurs comprises entre u et v, en particulier, il y a des nombres non entiers entre u et v, ce qui contredit le fait que f ne prenne que des valeurs entières.

2 Le cas des fonctions dérivées : théorème de Darboux

Le but de cette partie est de démontrer le théorème de Darboux :

Théorème 2 (Darboux) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors, la fonction dérivée f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

4. Justifier que le théorème de Darboux est vrai pour une fonction f de classe C^1.

Si f est de classe C^1, alors la dérivée f' est continue donc vérifie la PVI.

5. La fonction «serpent» f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable, mais sa dérivée n'est pas continue. Si de telles fonctions n'existaient pas, le théorème de Darboux n'aurait aucun intérêt.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On prend $a < b$ dans I tels que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

6. Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que $]a, a+r] \subset I$ et $\forall x \in]a, a+r],\ f(x) > f(a)$.

On a
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0.$$
Donc au voisinage de a, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ et donc $f(x) - f(a)$ et $x - a$ sont de même signe. Ainsi il existe $r > 0$, tel que $]a, a+r] \subset I$ et pour $x \in]a, a+r]$, on a $f(x) > f(a)$.

7. Justifier l'existence d'un maximum pour f sur $[a, b]$. En déduire avec soin qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, d'après le théorème des bornes atteintes, elle admet un maximum. Comme $f'(a) > 0$, d'après la question 6, il existe $r > 0$, tel que pour $x \in]a, a+r]$, on a $f(x) > f(a)$, ce qui montre que a ne peut être un maximum pour f. De même, $f'(b) < 0$, donc au voisinage de b, $\frac{f(x)-f(b)}{x-b} < 0$, donc pour $x < b$ proche de b, on a $f(x) > f(b)$ et donc b ne peut être un maximum pour f. Le maximum de f est donc atteint en un point intérieur à f qui est dérivable, donc sa dérivée s'y annule d'après le théorème des points critiques.

8. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ dérivable, $a < b$ dans I tel que $g'(a) < g'(b)$. Soit $k \in]g'(a), g'(b)[$. Démontrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que $g'(d) = k$, puis conclure.

On cherche $d \in]a, b[$ tel que $g'(d) = k$, ce qui revient à $f'(d) - k = 0$. On pose alors $f(x) = g(x) - kx$ pour $x \in I$. La fonction f est dérivable, et $f'(a) = g'(a) - k > 0$ et $f'(b) = g'(b) - k < 0$. Ainsi d'après ce qui précède, il existe $d \in]a, b[$ tel que $f'(d) = 0$, donc $g'(d) = k$. On fait de même si $g'(a) > g'(b)$, ce qui prouve le théorème de Darboux.

3 Une application du théorème de Darboux

On désire déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lfloor f(x) \rfloor.$$
Soit f une solution du problème.

9. Démontrer que f est une fonction affine, donc de la forme $x \mapsto ax+b$.

D'après le théorème de Darboux, la fonction dérivée f' vérifie la PVI, et elle est de plus à valeurs entières car égale à la partie entière de f, on en déduit d'après la question 3 que f' est constante égale à $a \in \mathbb{Z}$, et donc que f est affine de la forme $x \mapsto ax+b$.

10. On évalue en 0 et en 1, on a donc $a = \lfloor b \rfloor = \lfloor a+b \rfloor = a + \lfloor b \rfloor$ car $a \in \mathbb{Z}$. Ainsi $a = 0$.

11. On sait que f est constante égale à b et $f'(x) = \lfloor f(x) \rfloor$ donne que $0 = \lfloor b \rfloor$ donc $b \in [0,1[$. Réciproquement une fonction constante $b \in [0,1[$ est bien solution.

4 Une autre application du théorème de Darboux

On désire déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables et ne s'annulant pas vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f''(x)| = f(x).$$

Soit f une solution du problème.

12. Démontrer que f'' est de signe constant sur $\mathbb{R}$.

La fonction f'' ne s'annule pas car sinon f s'annule. C'est de plus une fonction dérivée car $f'' = (f')'$, donc d'après le théorème de Darboux, elle vérifie la PVI. Ainsi si f'' change de signe, alors la valeur 0 est atteinte, et donc f'' s'annule. Contradiction.

13. Démontrer qu'une fonction vérifiant l'équation différentielle $y'' + y = 0$ s'annule forcément sur $\mathbb{R}$.

Une telle solution est de la forme $y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. Or $y(0) = A$ et $y(\pi) = -A$, donc y continue, change de signe donc s'annule.

14. La fonction f'' est de signe constant et ne s'annule pas, donc si $f'' < 0$, la relation $|f''| = f$ devient $-f'' = f$ donc $f'' + f = 0$, ce qui est impossible d'après la question précédente car f ne s'annule pas. Ainsi, $f'' > 0$ et donc $f'' = f$, donc $f'' - f = 0$.

Ainsi $f(x) = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-x}$. Si $A < 0$, $\lim_{x\to+\infty} f = -\infty$, ce qui contredit la positivité de $f = f''$. De même si $B < 0$, la limite de f en $-\infty$ vaut $-\infty$, impossible. On a donc $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$. Si $A = B = 0$, alors f est nulle, ce qui est faux. Ainsi $(A,B) \neq (0,0)$. Réciproquement les fonctions de la forme $f(x) = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-x}$ avec $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$ et $(A,B) \neq (0,0)$ sont bien solutions.

Fin du corrigé