Espaces Vectoriels I
DS Confinement

Partie I (30 mn)

Exercice III : Un ensemble de matrices

On considère le sous-ensemble de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ suivant :

$$E=\left\{\begin{bmatrix} a & b & b & c\\ b & a & c & b\\ b & c & a & b\\ c & b & b & a\end{bmatrix},\ (a,b,c)\in\mathbb{C}^3\right\}$$

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$. Déterminer une base de E

Exercice I : Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Soient $a\in\mathbb{R}$ et $n\geq 3$. On considère l'application f définie par :
n=2 et a=1

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X]\\ P & \longmapsto & (X-a)\big[P'(X)+P'(a)\big]-2\big[P(X)-P(a)\big]\end{array}$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Démontrer que $\mathcal{B}=\left\{1, X-a, (X-a)^2,\dots,(X-a)^n\right\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Démontrer que $\mathbb{R}_n[X]=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

Partie I (30 mn)

2 exercices au choix

Exercice I : Etude de deux espaces supplémentaires

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $f^2 - 5f + 6\mathrm{id}_E = 0$. Montrer l'égalité :

$$E = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{id}_E)$$

Exercice II : Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$

On considère l'application T définie par :

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & (3X+8)P + (X^2 - 5X)P' - (X^3 - X^2)P'' \end{array}$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}\big(\mathbb{C}_3[X]\big)$. cad endomorphisme
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$. Que peut-on en déduire ?
5. En raisonnant par l'absurde, démontrer que le polynôme X n'admet pas d'antécédent par T.

Exercice III : Applications linéaires et composition

On considère trois endomorphismes p, q et r d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que

$$p \circ q = r \qquad q \circ r = p \qquad r \circ p = q$$

1. Démontrer que $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(r)$.
2. Démontrer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(r)$.
3. Montrer que $p^2 = q^2 = r^2$ (où f^2 désigne bien entendu $f \circ f$).
4. Etablir que $q^5 = q$ (on pourra s'intéresser à l'endomorphisme p^2qp^2).
5. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(q) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

Partie III (30 mn)

Exercice II : Fonctions et supplémentaire

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère $p \geq 1$ et a_1, ..., a_p des réels appartenant à $[0,1]$ deux à deux distincts. On pose enfin

$$F = \{f \in E\,,\, \forall k \in [\![1,p]\!]\,,\, f(a_k) = 0\}$$

1. Donner un exemple d'une fonction non-nulle appartenant à F.
2. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que l'application ψ : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ f & \longmapsto & \big(f(a_1), \dots, f(a_p)\big) \end{array}$ est linéaire et calculer $\mathrm{Ker}(\psi)$.
4. On suppose dans cette question que $p = 4$. On définit quatre fonctions g_1, g_2, g_3 et g_4 par :

$$\forall k \in [\![1,4]\!]\,,\, \forall x \in \mathbb{R}\,,\, g_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{4} \frac{x - a_j}{a_k - a_j}$$

   (a) Expliciter (sans les développer) les fonctions g_k et calculer $g_k(a_i)$ pour $(k,i) \in [\![1,4]\!]^2$.

   (b) On pose $G = \mathrm{Vect}\big(g_1, g_2, g_3, g_4\big)$. Démontrer précisément que $E = F \oplus G$.

Exercice III : Noyaux, images et composées

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Démontrer l'équivalence : $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$.
2. Démontrer l'équivalence : $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g) \iff \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f) = F$.

Fin

Corrigé

Partie I

EXERCICE III

① $E = \left\{ a \underbrace{\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}}_{I_4} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0&1&1&0\\ 1&0&0&1\\ 1&0&0&1\\ 0&1&1&0 \end{bmatrix}}_{A} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}}_{B}, \ (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\} = \mathrm{Vect}(I_4, A, B)$

On déduit donc immédiatement : $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_4(\mathbb{C})}$

La famille $\{I_4, A, B\}$ est génératrice de E.

Montrons que cette famille est libre : soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\alpha I_4 + \beta A + \gamma B = 0$

On déduit donc $\begin{bmatrix} \alpha&\beta&\beta&\gamma\\ \beta&\alpha&\gamma&\beta\\ \beta&\gamma&\alpha&\beta\\ \gamma&\beta&\beta&\alpha \end{bmatrix} = 0$, d'où : $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Finalement : $\boxed{\text{La famille } \{I_4, A, B\} \text{ est une base de } E}$ ce qui entraîne $\boxed{\dim(E) = 3}$

② On a tout d'abord $E \subset \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Par ailleurs, $I_4 \in E$.

Soient M_1 et M_2 deux matrices de E : il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ et $(\alpha', \beta', \gamma') \in \mathbb{C}^3$ tels que :

$$M_1 = \alpha I_4 + \beta A + \gamma B \qquad \text{et} \qquad M_2 = \alpha' I_4 + \beta' A + \gamma' B$$

Dès lors : $M_1 - M_2 = (\alpha - \alpha') I_4 + (\beta - \beta') A + (\gamma - \gamma') B \in E$

3/4

EXERCICE I

① Commençons par démontrer que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$: Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'où :

$(X-a)\left(P'(X)+P'(a)\right) \in \mathbb{R}_n[X]$. D'autre part, $P(X)-P(a) \in \mathbb{R}_n[X]$. Finalement : $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Montrons maintenant que f est linéaire : Soient $(P_1,P_2) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(\alpha P_1+\beta P_2) &= (X-a)\left[(\alpha P_1+\beta P_2)'(X) + (\alpha P_1+\beta P_2)'(a)\right] - 2\left[(\alpha P_1+\beta P_2)(X)-(\alpha P_1+\beta P_2)(a)\right] \\ &= (X-a)\left[\alpha P_1'(X)+\beta P_2'(X) + \alpha P_1'(a) + \beta P_2'(a)\right] - 2\left[\alpha P_1(X)+\beta P_2(X) - \alpha P_1(a) - \beta P_2(a)\right] \\ &= \alpha f(P_1) + \beta f(P_2). \end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$

② La famille $\mathcal{B}$ est à degrés échelonnés, donc, elle est libre.

Puisque cette famille possède $n+1$ éléments dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, on peut conclure :

$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$

③ $f(1) = (X-a)\left[0+0\right] - 2\left[1-1\right] = 0$ $\qquad$ $f(X-a) = (X-a)\left[1+1\right] - 2\left[X-a\right] = 0$

Pour $k \geqslant 2$, on trouve : $f\left((X-a)^k\right) = (X-a)\left[k(X-a)^{k-1} + k(a-a)^{k-1}\right] - 2\left[(X-a)^k - (a-a)^k\right] = (k-2)(X-a)^k$

On déduit donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & & & 0 \\ & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ & & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{bmatrix}$$

④ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Écrivons P dans la base $\mathcal{B}$: $P = a_0 + a_1(X-a) + a_2(X-a)^2 + \cdots + a_n(X-a)^n$

Posons enfin $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$. On a les équivalences :

$$P \in \ker(f) \iff f(P) = 0 \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\cdot U = 0 \iff \begin{cases} a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \\ a_5 = 0 \\ \vdots \\ a_n = 0 \end{cases} \iff P = a_0 + a_1(X-a) + a_2(X-a)^2$$

La famille $\{1, X-a, (X-a)^2\}$ est donc génératrice de $\ker(f)$. Par ailleurs, elle est libre vu qu'elle est à degrés échelonnés.

Ainsi : $\boxed{\text{La famille } \{1, X-a, (X-a)^2\} \text{ est une base de } \ker(f)}$

1/4

D'après le théorème du rang appliqué à f, on trouve : $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$

Donc : $n+1 = 3 + \dim(\operatorname{Im}(f))$, d'où : $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n-2$

Or : $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(f(1), f(X-a), f((X-a)^2), \dots, f((X-a)^n)\right) = \operatorname{Vect}\left(0,0,0,(X-a)^3, 2(X-a)^4, \dots, (n-2)(X-a)^n\right)$

$= \operatorname{Vect}\left((X-a)^3, (X-a)^4, \dots, (X-a)^n\right)$

Donc, on dispose d'une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$ de cardinal $n-2$.

Puisque $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n-2$, on peut conclure :

$\boxed{\text{La famille } \{(X-a)^3, (X-a)^4, \dots, (X-a)^n\} \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f)}$

5. Tout d'abord, d'après la question 4, on peut écrire : $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = 3 + (n-2) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$

D'autre part, si $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$ contenait un polynôme P non-nul, on aurait :

- $\deg(P) \leq 2$ (car $P \in \ker(f)$)
- $\deg(P) \geq 3$ (car $P \in \operatorname{Im}(f)$ et $P \neq 0$)

ce qui est impossible.

Ainsi, seul le polynôme nul appartient à $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$, d'où : $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$.

En conclusion : $\boxed{\mathbb{R}_n[X] = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)}$

... N° 13 - Un corrigé

Partie II

EXERCICE I

. Commençons par démontrer que $\ker(f-2id_E)\cap\ker(f-3id_E)=\{0\}$: L'inclusion $\{0\}\subset\ker(f-2id_E)\cap\ker(f-3id_E)$ est claire.

Réciproquement, soit $x\in\ker(f-2id_E)\cap\ker(f-3id_E)$: $\begin{cases} x\in\ker(f-2id_E), \text{ donc } (f-2id_E)(x)=0, \text{ d'où } f(x)=2x \\ x\in\ker(f-3id_E), \text{ donc } (f-3id_E)(x)=0, \text{ d'où } f(x)=3x \end{cases}$

On a donc $2x=3x$, d'où $x=0$

On a ainsi $\ker(f-2id_E)\cap\ker(f-3id_E)\subset\{0\}$, ce qui démontre bien l'égalité attendue.

. Démontrons maintenant que $E=\ker(f-2id_E)+\ker(f-3id_E)$:

. Analyse : Soit $u\in E$. On cherche $u_1\in\ker(f-2id_E)$ et $u_2\in\ker(f-3id_E)$ tels que $u=u_1+u_2$.
Les éléments u_1 et u_2 doivent donc vérifier $f(u)=f(u_1+u_2)=f(u_1)+f(u_2)=2u_1+3u_2$
Ainsi, les éléments u_1 et u_2, en cas d'existence, doivent vérifier le système $\begin{cases} u=u_1+u_2 \\ f(u)=2u_1+3u_2 \end{cases}$

ce qui donne $\begin{cases} u_1=3u-f(u) \\ u_2=f(u)-2u \end{cases}$

. Synthèse : L'inclusion $\ker(f-2id_E)+\ker(f-3id_E)\subset E$ est claire.
Réciproquement, considérons $u\in E$. Posons $u_1=3u-f(u)$ et $u_2=f(u)-2u$.

* On a $u_1+u_2=u$
* $f(u_1)=f(3u-f(u))=3f(u)-f^2(u)=3f(u)-[5f(u)-6u]=2[3u-f(u)]=2u_1$, d'où $u_1\in\ker(f-2id_E)$
* $f(u_2)=f(f(u)-2u)=f^2(u)-2f(u)=[5f(u)-6u]-2f(u)=3[f(u)-2u]=3u_2$, d'où $u_2\in\ker(f-3id_E)$

On a donc bien écrit $u=u_1+u_2$ avec $u_1\in\ker(f-2id_E)$ et $u_2\in\ker(f-3id_E)$

Ainsi : $E\subset\ker(f-2id_E)+\ker(f-3id_E)$, d'où l'égalité annoncée.

En conclusion : $\boxed{E=\ker(f-2id_E)\oplus\ker(f-3id_E)}$

EXERCICE II

① Soient $(P_1,P_2)\in(\mathbb{C}[X])^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. On a :

$$\begin{aligned} T(\alpha P_1+\beta P_2) &= (3X+8)(\alpha P_1+\beta P_2)+(X^2-5X)(\alpha P_1+\beta P_2)'-(X^3-X^2)(\alpha P_1+\beta P_2)'' \\ &= (3X+8)(\alpha P_1+\beta P_2)+(X^2-5X)(\alpha P_1'+\beta P_2')-(X^3-X^2)(\alpha P_1''+\beta P_2'') \\ &= \alpha\left[(3X+8)P_1+(X^2-5X)P_1'-(X^3-X^2)P_1''\right]+\beta\left[(3X+8)P_2+(X^2-5X)P_2'-(X^3-X^2)P_2''\right] \\ &= \alpha T(P_1)+\beta T(P_2) \end{aligned}$$

On conclut donc : $\boxed{T\in\mathcal{L}(\mathbb{C}[X])}$

② Écrivons $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $a_n\neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{On a } T(P) &= (3X+8)\sum_{k=0}^{n}a_kX^k+(X^2-5X)\sum_{k=1}^{n}ka_kX^{k-1}-(X^3-X^2)\sum_{k=2}^{n}k(k-1)a_kX^{k-2} \\ &= (3X+8)\left[a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}a_kX^k\right]+(X^2-5X)\left[na_nX^{n-1}+(n-1)a_{n-1}X^{n-2}+\sum_{k=1}^{n-2}ka_kX^{k-1}\right] \\ &\quad -(X^3-X^2)\left[n(n-1)a_nX^{n-2}+(n-1)(n-2)a_{n-1}X^{n-3}+\sum_{k=2}^{n-2}k(k-1)a_kX^{k-2}\right] \\ &= (3a_n+na_n-n(n-1)a_n)X^{n+1}+(8a_n+3a_{n-1}-5na_n+(n-1)a_{n-1}+n(n-1)a_n-(n-1)(n-2)a_{n-1})X^n+R \end{aligned}$$

1/6

avec $\deg(R) \leq m-1$

- Supposons que $\deg(T(P)) = m$. Alors, le coefficient de X^{m+1} de $T(P)$ doit être nul, c'est à dire :

$$a_m(3+m-m^2+m) = 0$$. Or, $a_m \neq 0$, d'où : $m^2 - 2m - 3 = 0 \iff m = 3$ ou $m = -1$

Puisque $m \in \mathbb{N}$, on en déduit $m = 3$

Le coefficient de degré 3 est alors $(-a_m + 3a_{m-1})$ qui peut être nul ou pas.

Ainsi : $\boxed{\text{Une condition nécessaire pour que } \deg(T(P)) = \deg(P) \text{ est } m=3}$

③ Soit $P \in T(\mathbb{C}_3[X])$. Par définition, il existe $Q \in \mathbb{C}_3[X]$ tel que $P = T(Q)$. D'après le raisonnement fait dans la question ②, on peut dire que $\deg(T(Q)) \leq 4$ et que le coefficient de X^4 est nul, d'où $\deg(T(Q)) \leq 3$, c'est à dire, $P \in \mathbb{C}_3[X]$.

Finalement : $\boxed{T(\mathbb{C}_3[X]) \subset \mathbb{C}_3[X]}$

④ Soit $P \in \ker(T)$. Si $P \neq 0$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ avec $a_m \neq 0$. $T(P) = 0$ implique que le coefficient dominant $(3a_m + ma_m - m(m-1)a_m) = 0$, d'où : $m = 3$ puisque $a_m \neq 0$. P s'écrit donc $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Dès lors :

$$T(P) = 0 \iff (3X+8)(aX^3+bX^2+cX+d) + (X^2-5X)(3aX^2+2bX+c) - (X^3-X^2)(6aX+2b) = 0$$
$$\iff (-a+3b)X^3 + (4c)X^2 + (3c+3d)X + 8d = 0$$
$$\iff \begin{cases} -a+3b=0 \\ 4c=0 \\ 3c+3d=0 \\ 8d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=3b \\ c=0 \\ d=0. \end{cases}$$

Ainsi : $\ker(T) \subset \{3bX^3 + bX^2,\ b \in \mathbb{C}\}$

Réciproquement, si $b \in \mathbb{C}$, $T(3bX^3+bX^2) = (3X+8)(3bX^3+bX^2) + (X^2-5X)(9bX^2+2bX) - (X^3-X^2)(18bX+2b)$
$= 9bX^4 + 3bX^3 + 24bX^3 + 8bX^2 + 9bX^4 + 2bX^3 - 45bX^3 - 10bX^2 - 18bX^4 - 2bX^3 + 18bX^3 + 2bX^2$
$= 0$

Finalement : $\boxed{\ker(T) = \{b(3X^3+X^2),\ b \in \mathbb{C}\} = \mathrm{Vect}(3X^3+X^2)}$

Puisque $\ker(T) \neq \{0\}$, on déduit que : $\boxed{\text{L'application } T \text{ n'est pas injective}}$

⑤ Supposons que X admet un antécédent par T : $\exists P \in \mathbb{C}[X]$, $T(P) = X$. Le polynôme P ne peut pas être nul, donc, en posant $m = \deg(P)$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ avec $a_m \neq 0$. Puisque le coefficient de X^{m+1} dans $T(P)$ est $a_m(-m^2+2m+3)$, on en déduit que :

- $m = 0$ pour que X^{m+1} soit X
- ou $m = 3$ pour que le coefficient de X^{m+1} soit nul.

d'où $m \leq 3$.

Or, d'après ④, $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ vérifie $T(P) = X$ si et seulement si $\begin{cases} -a+3b=0 \\ 4c=0 \\ 3c+d=1 \\ 8d=0 \end{cases}$, ce qui est impossible.

Ainsi, $\boxed{\text{le polynôme } X \text{ n'admet pas d'antécédent par } T}$

2/6

⑥ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme vérifiant $T(P) = 8P$. D'après la question ⑤, on a alors nécessairement $\deg(P) = 3$.
Ecrivons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. D'après les calculs de la question ④, on a :

$$T(P) = (-a+3b)X^3 + 4cX^2 + 3(c+d)X + 8d, \quad \text{d'où :}$$

$$T(P) = 8P \iff \begin{cases} -a+3b = 8a \\ 4c = 8b \\ 3(c+d) = 8c \\ 8d = 8d \end{cases} \iff \begin{cases} 3b = 9a \\ c = 2b \\ 3d = 5c \end{cases} \iff \begin{cases} b = 3a \\ c = 6a \\ d = 10a \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $T(P) = 8P$ est l'ensemble des polynômes de la forme $aX^3 + 3aX^2 + 6aX + 10a$ avec $a \in \mathbb{C}$.

Ainsi $\boxed{\{P \in \mathbb{C}[X],\ T(P) = 8P\} = \mathrm{Vect}(X^3 + 3X^2 + 6X + 10)}$

EXERCICE III

① . Montrons que $\ker(p) = \ker(q)$:
. Soit $x \in \ker(p)$. On a donc $p(x) = 0$, donc, puisque $q = r \circ p$, $q(x) = r(p(x)) = r(0) = 0$.
On a donc $x \in \ker(q)$, ce qui montre l'inclusion $\ker(p) \subset \ker(q)$.
. Soit $x \in \ker(q)$. On a donc $q(x) = 0$, donc, puisque $r = p \circ q$, $r(x) = p(q(x)) = p(0) = 0$
puis, vu que $p = q \circ r$, $p(x) = q(r(x)) = q(0) = 0$, d'où $x \in \ker(p)$. Ainsi $\ker(q) \subset \ker(p)$

. Montrons que $\ker(q) = \ker(r)$:
. Soit $x \in \ker(q)$. On a donc $q(x) = 0$, donc, puisque $r = p \circ q$, il vient $r(x) = p(q(x)) = p(0) = 0$
On a donc $x \in \ker(r)$, ce qui montre l'inclusion $\ker(q) \subset \ker(r)$.
. Soit $x \in \ker(r)$. On a donc $r(x) = 0$, donc, puisque $p = q \circ r$, il vient $p(x) = q(r(x)) = q(0) = 0$
puis, vu que $q = r \circ p$, $q(x) = r(p(x)) = r(0) = 0$, d'où $x \in \ker(q)$. Ainsi $\ker(r) \subset \ker(q)$.

Finalement : $\boxed{\ker(p) = \ker(q) = \ker(r)}$

② . Montrons que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)$:
. Soit $y \in \mathrm{Im}\,p$. Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x) = (q \circ r)(x) = q(r(x))$, d'où $y \in \mathrm{Im}(q)$. Ainsi : $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$
. Soit $y \in \mathrm{Im}(q)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = q(x) = (r \circ p)(x) = (p \circ q \circ p)(x) = p((q \circ p)(x))$
Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(p)$, d'où : $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$.

. Montrons que $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(r)$:
. Soit $y \in \mathrm{Im}(q)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = q(x) = (r \circ p)(x) = r(p(x))$, d'où $y \in \mathrm{Im}(r)$. Ainsi : $\mathrm{Im}\,q \subset \mathrm{Im}\,r$.
. Soit $y \in \mathrm{Im}(r)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = r(x) = (p \circ q)(x) = (q \circ r \circ q)(x) = q((r \circ q)(x))$, d'où $y \in \mathrm{Im}\,q$.
Ainsi : $\mathrm{Im}(r) \subset \mathrm{Im}(q)$.

Finalement : $\boxed{\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(r)}$

③ . Montrons que $p^2 = q^2$: $p^2 = p \circ p = (q \circ r) \circ p = q \circ (r \circ p) = q \circ q = q^2$

. Montrons que $q^2 = r^2$: $q^2 = q \circ q = (r \circ p) \circ q = r \circ (p \circ q) = r \circ r = r^2$

Finalement : $\boxed{p^2 = q^2 = r^2}$

④ On a : . $p^2 q p^2 = q^2 q q^2$ (car $p^2 = q^2$), donc $p^2 q p^2 = q^5$

. $p^2 q p^2 = p \circ (pq) \circ p^2 = p \circ r \circ p^2 = p \circ (r \circ p) \circ p = p \circ q \circ p = r \circ p = q$

Ainsi : $\boxed{q^5 = q}$

3/6

(5) . Montrons que $\ker(q) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0\}$: On a bien entendu $\{0\} \subset \ker(q) \cap \mathrm{Im}(q)$. Réciproquement, soit $x \in \ker(q) \cap \mathrm{Im}(q)$.
On a donc $q(x) = 0$ et d'autre part : $\exists a \in E,\ x = q(a)$
Puisque $q^5 = q$, on a donc : $x = q^5(a) = q^4(q(a)) = q^4(x) = q^3(q(x)) = q^3(0) = 0$
Ainsi, $\ker(q) \cap \mathrm{Im}(q) \subset \{0\}$, d'où l'égalité.

. Montrons que $E = \ker(q) + \mathrm{Im}\, q$: On a bien entendu $\ker(q) + \mathrm{Im}(q) \subset E$. Réciproquement, soit $x \in E$.

. Analyse : On cherche $y \in \ker(q)$ et $z = q(a) \in \mathrm{Im}(q)$ tels que $x = y + z = y + q(a)$
Les éléments y et z doivent donc vérifier $q^4(x) = q^4(y) + q^5(a) = q^3(q(y)) + q(a)$ (car $q^5 = q$)
$= q^3(0) + z = z$
ce qui nous donne $y = x - q^4(x)$ et $z = q^4(x)$

. Synthèse : Posons $y = x - q^4(x)$ et $z = q^4(x)$:
- $q(y) = q(x) - q^5(x) = q(x) - q(x) = 0$ (car $q^5 = q$), donc $y \in \ker(q)$.
- $z = q^4(x) = q(q^3(x))$, d'où $z \in \mathrm{Im}(q)$
- $y + z = x - q^4(x) + q^4(x) = x$

On a donc écrit $x = y + z$ avec $y \in \ker(q)$ et $z \in \mathrm{Im}(q)$, d'où $E \subset \ker q + \mathrm{Im}(q)$.

En conclusion : $\boxed{E = \ker(q) \oplus \mathrm{Im}(q)}$

EXERCICE IV

(1) Rappel : On a vu dans le chapitre sur "L'ensemble des réels" que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

Supposons que f est lipschitzienne sur I : $\exists k \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$

En appliquant l'inégalité du rappel à $a = f(x)$ et $b = f(y)$, on trouve : $\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leq |f(x) - f(y)|$

On a donc : $\forall (x,y) \in I^2,\ \big||f(x)| - |f(y)|\big| \leq |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$

Finalement : $\boxed{\text{Si } f \text{ est lipschitzienne sur } I, \text{ alors } |f| \text{ est lipschitzienne sur } I}$

(2) Considérons la fonction $f : \begin{array}{rcl} [0;2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ -1 & \text{si } x \in]1;2] \end{cases} \end{array}$. On a : $\forall x \in [0,2],\ |f|(x) = 1$

Ainsi : $\forall (x,y) \in [0,2]^2,\ \big||f|(x) - |f|(y)\big| = |1-1| = 0 \leq 1 \times |x-y|$, d'où $|f|$ est 1-lipschitzienne

Supposons que f soit lipschitzienne : $\exists k \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in [0,2]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$

Prenons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x = 1 - \frac{1}{n} \in [0,1]$ et $y = 1 + \frac{1}{n} \in]1;2]$. On obtient $|1 - (-1)| \leq k \times \frac{2}{n}$

c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2 \leq \frac{2k}{n}$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $2 \leq 0$, ce qui est absurde. Ainsi : f n'est pas lipschitzienne.

(3) Soient f et g deux fonctions lipschitziennes : $\exists k_1 \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k_1\,|x-y|$

$\exists k_2 \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |g(x) - g(y)| \leq k_2\,|x-y|$

4/6

On a donc : $\forall (x,y)\in I^2,\ \left|(f+g)(x)-(f+g)(y)\right| = \left|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)\right| = \left|f(x)-f(y)+g(x)-g(y)\right|$

$\leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|$ (d'après l'inégalité triangulaire)

$\leq k_1|x-y|+k_2|x-y| = (k_1+k_2)|x-y|$

Ainsi : la fonction $f+g$ est lipschitzienne.

Finalement : $\boxed{\text{La somme de deux fonctions lipschitziennes sur } I \text{ est lipschitzienne sur } I}$

4 a] • Si $|x|>1$, alors, $|\sin(x)|\leq 1<|x|$, donc, le résultat est vérifié.

• Supposons maintenant que $x\in[-1,1]$:

Posons $\varphi(x)=\sin(x)-x$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x)=\cos x-1\leq 0$, d'où φ est décroissante sur $[-1,1]$

x	-1	0	1
φ	$\searrow$	0	$\searrow$

• 1er Cas : $x\in[0,1]$. Alors : $\sin(x)\geq 0$, d'où :
$|\sin x|\leq|x| \iff \sin(x)\leq x \iff \varphi(x)\leq 0$, ce qui est vrai.

• 2nd Cas : $x\in[-1,0]$. Alors, $\sin(x)\leq 0$, d'où :
$|\sin x|\leq|x| \iff -\sin x\geq -x \iff 0\geq\varphi(x)$, ce qui est vrai.

Finalement : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ |\sin(x)|\leq|x|}$

Rq : Cette inégalité se démontre aussi très facilement grâce à l'inégalité des accroissements finis.

b] Rappel : $\forall (p,q)\in\mathbb{R}^2,\ \sin(p)-\sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

On a donc : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |\sin x-\sin y| = 2\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|$

$\leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|$ (puisque : $\forall u\in\mathbb{R},\ |\cos(u)|\leq 1$)

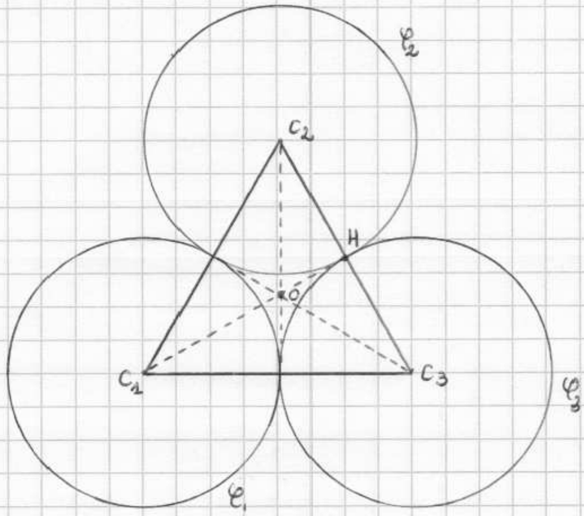
$\leq 2\times\left|\frac{x-y}{2}\right|$ (d'après la question 4 a])

$\leq |x-y|$

Finalement : $\boxed{\text{La fonction sinus est 1-lipschitzienne sur } \mathbb{R}}$

5/6

EXERCICE FACULTATIF



(Projection sur le sol)

Soit O le centre de gravité du triangle $(C_1C_2C_3)$ où C_1, C_2 et C_3 sont les centres respectifs des boules.

On cherche le rayon minimal d'un cercle de centre O pour que ce cercle "coince" entre les 3 boules. Ce cercle sera alors tangent à $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ et on aura :

$$r = OC_1 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rayon de la boule}}}{3} = \frac{2}{3} HC_1 - 3 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la hauteur d'un triangle équilatéral de côté } a \text{ vaut } a\frac{\sqrt{3}}{2}}}{=} \frac{2}{3} \times C_1C_2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 = \frac{2}{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 = 2\sqrt{3} - 3$$

$\boxed{\text{Le diamètre cherché est donc } 4\sqrt{3} - 6 \text{ cm}}$

6/6

Partie III

EXERCICE II

① La fonction $x \longmapsto (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_p)$ convient.

② Par définition, $F \subset E$. Par ailleurs, la fonction nulle appartient clairement à F.

Considérons maintenant deux fonctions f et g dans F et deux réels α et β. On trouve :

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ (\alpha f+\beta g)(a_k) = \alpha f(a_k)+\beta g(a_k) = \alpha\times 0+\beta\times 0 = 0 \quad , \text{ d'où } \alpha f+\beta g \in F.$$

Ainsi : $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

③ • Montrons que Ψ est linéaire : considérons pour cela $(f,g)\in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\Psi(f+g) = \Big((f+g)(a_1),\dots,(f+g)(a_p)\Big) = \Big(f(a_1)+g(a_1),\dots,f(a_p)+g(a_p)\Big) = \Big(f(a_1),\dots,f(a_p)\Big)+\Big(g(a_1),\dots,g(a_p)\Big) = \Psi(f)+\Psi(g)$$

$$\Psi(\alpha f) = \Big((\alpha f)(a_1),\dots,(\alpha f)(a_p)\Big) = \Big(\alpha f(a_1),\dots,\alpha f(a_p)\Big) = \alpha\Big(f(a_1),\dots,f(a_p)\Big) = \alpha\Psi(f)$$

Ainsi : $\boxed{\Psi \text{ est linéaire}}$

1/4

- Soit $f \in E$. On a les équivalences :

$$f \in \mathrm{Ker}(\Psi) \iff \Psi(f)=0 \iff (f(a_1),\dots,f(a_p))=(0,\dots,0) \iff \forall k \in [\![1,p]\!],\ f(a_k)=0 \iff f \in F$$

Finalement : $\boxed{\mathrm{Ker}(\Psi)=F}$

④ a] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve :

$$g_1(x)=\frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} \qquad g_2(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)} \qquad g_3(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)} \qquad g_4(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}$$

On trouve donc : $\boxed{\forall (k,i)\in [\![1,4]\!]^2,\ g_k(a_i)=\begin{cases}1 & \text{si } i=k\\ 0 & \text{si } i\neq k\end{cases}}$

b] Nous allons successivement démontrer que $F\cap G=\{0\}$ puis que $E=F+G$.

⊛ Montrons que $F\cap G=\{0\}$: L'inclusion $\{0\}\subset F\cap G$ est claire.

Réciproquement, considérons $f\in F\cap G$. $f\in G$, donc, il existe $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ tel que $f=\alpha g_1+\beta g_2+\gamma g_3+\delta g_4$.

$f\in F$, donc, $f(a_1)=0$, d'où : $0=\alpha g_1(a_1)+\beta g_2(a_1)+\gamma g_3(a_1)+\delta g_4(a_1)$, c'est-à-dire $0=\alpha$ (d'après ④a]).

De même, $f(a_2)=0$ d'où $\beta=0$, $f(a_3)=0$ d'où $\gamma=0$ et $f(a_4)=0$ d'où $\delta=0$.

On trouve donc $f=0$, ce qui permet d'affirmer $F\cap G\subset\{0\}$.

On a donc l'égalité $F\cap G=\{0\}$.

⊛ Montrons que $E=F+G$: L'inclusion $F+G\subset E$ est évidente puisque F et G sont des ssev de E.

Réciproquement, soit $f\in E$. Après réflexion (au brouillon), on peut écrire :

$$f=\underbrace{\left(f-f(a_1)g_1-f(a_2)g_2-f(a_3)g_3-f(a_4)g_4\right)}_{\in F}+\underbrace{\left(f(a_1)g_1+f(a_2)g_2+f(a_3)g_3+f(a_4)g_4\right)}_{\in G}$$

d'où $f\in F+G$. L'égalité $E=F+G$ est donc démontrée.

En conclusion : $\boxed{E=F\oplus G}$

EXERCICE III

① $\Longrightarrow$ Supposons que $\mathrm{Ker}(g\circ f)=\mathrm{Ker}(f)$.

L'inclusion $\{0_F\}\subset \mathrm{Ker}(g)\cap \mathrm{Im}(f)$ est évidente puisque $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont deux ssev de F

Réciproquement, soit $x\in\mathrm{Ker}(g)\cap\mathrm{Im}(f)$. On a donc $g(x)=0$ et : $\exists a\in E,\ x=f(a)$.

On constate que $(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(x)=0$, d'où $a\in\mathrm{Ker}(g\circ f)=\mathrm{Ker}(f)$, donc $f(a)=0$, donc $x=0_F$

Par suite, $\mathrm{Ker}(g)\cap\mathrm{Im}(f)\subset\{0_F\}$, ce qui démontre la première implication.

2/4

$\Leftarrow$ Supposons que $\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$

Si $x \in \ker(f)$, alors, $f(x) = 0$, d'où $g(f(x)) = g(0) = 0$ puis $x \in \ker(g \circ f)$.

L'inclusion $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ est donc prouvée.

Réciproquement, soit $x \in \ker(g \circ f)$. On a donc $(g \circ f)(x) = 0$, c'est-à-dire, $g(f(x)) = 0$.

Le vecteur $f(x)$ appartient donc à $\ker(g)$, mais on a aussi $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$

Ainsi : $f(x) \in \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$ par hypothèse, d'où $f(x) = 0$ puis $x \in \ker(f)$.

L'inclusion $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$ est donc démontrée.

Finalement, $\ker(g \circ f) = \ker(f)$

En conclusion : $\boxed{\ker(g \circ f) = \ker(f) \iff \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_F\}}$

② $\Rightarrow$ Supposons que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$

L'inclusion $\ker(g) + \mathrm{Im}(f) \subset F$ est claire puisque $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sev de F

Réciproquement, soit $x \in F$. On a $g(x) \in \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f)$, donc : $\exists \alpha \in E, g(x) = (g \circ f)(\alpha)$

Ecrivons alors : $x = \underbrace{x - f(\alpha)}_{\in \ker(g)} + \underbrace{f(\alpha)}_{\in \mathrm{Im}(f)}$, d'où : $x \in \ker(g) + \mathrm{Im}(f)$.

$\in \ker(g)$ car $g(x - f(\alpha)) = g(x) - (g \circ f)(\alpha) = 0$

L'inclusion $F \subset \ker(g) + \mathrm{Im}(f)$ est donc vérifiée, d'où l'égalité.

$\Leftarrow$ Supposons que $\ker(g) + \mathrm{Im}(f) = F$

Si $x \in \mathrm{Im}(g \circ f)$, alors, il existe $a \in E$ tel que $x = (g \circ f)(a) = g(f(a))$, d'où $x \in \mathrm{Im}(g)$

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Im}(g)$: Il existe $a \in F$ tel que $g(a) = x$

Puisque $F = \ker(g) + \mathrm{Im}(f)$, on peut écrire $a = b + c$ avec $b \in \ker(g)$ et $c \in \mathrm{Im}(f)$.

On a donc $g(b) = 0$ et : $\exists u \in E$, $c = f(u)$.

Ainsi : $x = g(a) = g(b+c) = g(b) + g(c) = 0 + (g \circ f)(u) = (g \circ f)(u) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$.

L'inclusion $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$ est donc démontrée, d'où l'égalité.

En conclusion : $\boxed{\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g) \iff \ker(g) + \mathrm{Im}(f) = F}$

3/4

EXERCICE FACULTATIF

Amélie doit prendre 2 allumettes.

Paul peut alors prendre 1, 2 ou 3 allumettes, et Amélie prendra alors respectivement 3, 2 ou 1 allumettes, ramassant ainsi la 6ème allumette. Il reste alors 5 allumettes sur la table et c'est à Paul de jouer.

| | | | |

Quelque soit la prise de Paul (1, 2 ou 3), Amélie ramasse 3, 2 ou 1 allumette, laissant ainsi la dernière allumette à Paul.

4/4